ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

21. Band, Heft 4 31. Oktober 1939 S. 145—192

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

Cramér, Harald: Entwicklungslinien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (*Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.*) 9. Congr. des Math. scand. 67—86 (1939).

As the title suggests this is a critical-historical survey of some of the leading lines of development in the theory of probability, carried to the present. In particular are discussed (1) the normal distribution function, (2) the method of moments of Bienaymé, Tschebycheff and Markoff, (3) the characteristic functions of Feller, Khintchine, P. Lévy, Pólya and Lindeberg, (4) the normal correlation function for multidimensional stochastic variation, (5) Markoff's series, (6) the general homogeneous nonconsequential stochastic process of Kolmogoroff. *Albert A. Bennett.*

Baumberger, A.: Beitrag zum Problem von Bernoulli. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg **5**, 103—116 (1939).

Ergänzende Untersuchungen zu der Dissertation des Verf., Über Verteilungsfunktionen in der Kollektivmaßlehre (Bern 1937). Es wird z. B. der Fall behandelt: Gegeben ist eine Urne mit Kugeln, die mit Zahlen von 0 bis m bezeichnet sind; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Ziehungen die Summe x zu erhalten? Hierfür sowie für allgemeinere Fälle werden die Wahrscheinlichkeiten angegeben, und es wird der Poissonsche Grenzübergang ausgeführt, der zur Verteilungsfunktion für die sog. seltenen Ereignisse führt. *Kamke* (Tübingen).

Mises, R. v.: Über Aufteilungs- und Besetzungs-Wahrscheinlichkeiten. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, N. s. **4**, Fasc. 1/2, 145—163 (1939).

Es seien k „Figuren" auf n „Plätze" aufzuteilen: nach Verf. ist die Anordnung definiert, wenn die Anzahl der zu jedem Platz gehörigen Figuren bekannt ist, die „Besetzung" hingegen, wenn nur die Anzahl der nullfach, einfach, zweifach, ..., k-fach besetzten Plätze gegeben ist; die möglichen Besetzungen sind daher durch die k-tupel $x_0, x_1, \ldots, x_k$ mit $\sum x_s = n$, $\sum s x_s = k$ (x_s ganzzahlig $\geqq 0$) charakterisiert. — Wenn alle n^k Möglichkeiten gleichwahrscheinlich sind, ist die Wahrscheinlichkeit jeder Besetzung durch die Formel bestimmt:

$$P(x_0, x_1, \ldots, x_k) = k!\, n!\, n^{-k} / \Pi \{x_s!\, (s!)^{x_s}\}.$$

Verf. behandelt zuerst elementare Fragen (z. B. die die eindimensionalen Verteilungen der einzelnen x_s betreffen), und dann insbesondere das Problem der höchstwahrscheinlichen Besetzung (die in direkter Weise bestimmt wird), und die asymptotischen Ergebnisse für sehr große n und k (bei verschiedenen Grenzübergängen).

Bruno de Finetti (Trieste).

Evans, H. P., and S. C. Kleene: A postulational basis for probability. Amer. Math. Monthly **46**, 141—148 (1939).

Die formalen Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten werden in axiomatischer Weise (wie z. B. bei Bohlmann) festgestellt; ferner wird ein Axiom eingeführt, das, bei Vorhandensein des Häufigkeitslimes, diesen mit der Wahrscheinlichkeit verknüpft.

Bruno de Finetti (Trieste).

Ville, Jean: Étude critique de la notion de collectif. Paris: Thèse 1939. 116 pag.

Nachdem R. von Mises den Kollektivbegriff in nichtmathematischer Form eingeführt und definiert hat, haben sich mehrere Mathematiker bemüht, diesen Begriff und hauptsächlich die zugrunde liegende Eigenschaft der „Regellosigkeit" in exakter Form zu präzisieren. Verf. untersucht diese früheren Versuche — und insbesondere die Theorie von Wald, die die allgemeinste Lösung des Problems darstellte —, und

zeigt weiter, wie aus dem von ihm eingeführten Begriff der „Martingale“ dieselben Regellosigkeitsbedingungen der Waldschen Theorie, aber auch andere noch allgemeinerer Natur entstehen. Die sich auf den Begriff der Martingale gründenden Regellosigkeitsbedingungen bieten eine mathematische Formulierung des Misesschen Begriffes „des ausgeschlossenen Spielsystems“ und geben in einem gewissen Sinne [Eigenschaft (Γ), Seite 70] die allgemeinste Lösung des Kollektivproblems. — Bei Behandlung der angedeuteten Grundfragen (in Kap. I—IV) werden auch mehrere interessante Nebenprobleme untersucht und gelöst; am Ende (Kap. V) werden wichtige Anwendungen des Begriffs der Martingale studiert (unabhängig von ihrer Benutzung für die Definition der Kollektive), die insbesondere die asymptotischen Gesetze der stochastischen Vorgänge betreffen. *Bruno de Finetti* (Trieste).

● **Ville, Jean: Étude critique de la notion de collectif. (Monogr. d. probabilités. Publiées par Émile Borel. Fasc. 3.)** Paris: Gauthier-Villars 1939. 144 pag. Frcs. 75.—.

Eine eingehende und sehr interessante Studie über die mathematische Definition der Wahrscheinlichkeit, insbesondere über die Verschärfung des Kollektivbegriffes von v. Mises durch Wald. Bei dieser Verschärfung wird nicht die Gesamtheit der möglichen Auswahlen, sondern nur eine abzählbare Menge von solchen betrachtet, um den Kollektivbegriff widerspruchsfrei zu machen. *Kamke* (Tübingen).

Doeblin, W.: Sur les sommes d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes. Bull. Sci. math., II. s. **63**, 23—32 et 35—64 (1939).

Mehrere meistens schon bekannte Probleme und Ergebnisse über Summen einer großen Anzahl von unabhängigen zufälligen Größen werden vom Verf. in neuem Lichte dargestellt und behandelt, indem deren Beziehung einerseits zu dem Begriff der „Dispersion“ und anderseits zur Theorie der unbegrenzt zerlegbaren Verteilungen in den Vordergrund geschoben wird. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Dugué, Daniel: Sur quelques propriétés analytiques des fonctions caractéristiques. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1778—1780 (1939).

Les fonctions caractéristiques de variables aléatoires bornées sont des fonctions entières d'ordre un et de type exponentiel $[|f(z)| < e^{A|z|}]$. Si la loi de probabilité élémentaire $p(\alpha)$ est à partir d'une certaine valeur de $|x|$ comprise entre $Ke^{-x(1+\alpha)}$ et $K'e^{-x(1+\alpha)}$, la fonction caractéristique est une fonction entière d'ordre $1 + 1/\alpha$. — L'auteur étudie différentes propriétés des lois de probabilité qui résultent de ces propositions. Etant données deux fonctions caractéristiques entières φ_1 et φ_2, pour que le quotient φ_2/φ_1 soit caractéristique, il est nécéssaire que l'ordre de φ_2 soit au moins égal à celui de φ_1. Une fonction caractéristique entière ne peut être décomposée qu'en deux fonctions caractéristiques entières. La loi de Gauss donne la seule fonction caractéristique entière d'ordre fini $\varphi(z)$ telle que $\varphi(z)/[\varphi(z/k)]$ soit encore fonction caractéristique. Si une loi de distribution est décomposable en deux lois dont l'une est normale, il suffit de la modifier infiniment peu à distance finie pour que la propriété cesse d'être vraie. *B. Hostinský* (Brünn).

Burkhardt, F., und H. v. Stackelberg: Zur Ableitung der Sheppardschen Korrektur. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg **5**, 127—130 (1939).

Sei z die Klassenhäufigkeit, X die allgemeine Variable, x die Klassenmitte, M das arithmetische Mittel einer Verteilung und $\varepsilon = X - x$; die Verff. untersuchen, wann die beiden von Yule (An introduction to the theory of statistics. 1929, p. 211) unterschiedenen Fälle, 1. X und ε unkorreliert, 2. x und ε unkorreliert, eintreten, und leiten für beide die entsprechende Sheppardsche Korrektur her, die im ersten Falle $\mu_1^2 = \mu - \mu_\varepsilon^2$, im zweiten $\mu_1^2 = \mu + \mu_\varepsilon^2$ lautet. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Kenney, J. F.: Some topics in mathematical statistics. Amer. Math. Monthly **46**, 59—74 (1939).

A nearly self-contained exposition of certain recent developments in mathematical statistics, supported by ample bibliographic references. No original results announced. *Albert A. Bennett* (Providence).

Mosak, Jacob L.: The least-squares standard error of the coefficient of elasticity of demand. J. Amer. Statist. Assoc. **34**, 353—361 (1939).

The work of Henry Schultz, "The standard error of the coefficient of elasticity

of demand", J. Amer. Statist. Assoc. 28, 64—69 (1933), provided an upper bound to this standard error. The methods are here carried further to find the value of this standard error itself for any given point of the demand function. A particularly simple form is obtained at the point of means of the variables. *Albert A. Bennett.*

Bishop, D. J., and U. S. Nair: A note on certain methods of testing for the homogenity of a set of estimated variances. J. Roy. Statist. Soc. 6, Suppl., 89—99 (1939).

As criteria for testing simultaneously whether the variances from a number k of sources are the same, three proposals are extant; (a) Neyman's and Pearson's likelihood ratio criterion L_1, (b) Welch's criterion L_1' having adjustable weights, (c) Bartlett's criterion, called μ. Each is in the form of the ratio of a geometric mean to the weighted arithmetic mean of the k mean squares from which the variances are estimated. Weights for L_1 are proportional to the number of observations from each source; for μ, to the degrees of freedom. Cases of equivalence are investigated by two methods. In case of nonequivalence arguments are offered favoring the μ-test. *Albert A. Bennett.*

Wilson, Edwin B., and Jane Worcester: The resolution of six tests into three general factors. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 73—77 (1939).

The problem of factor analysis as used by biometrists admits of a plurality of solutions in certain cases. Thurstone's centroid method for the case of more than a few tests would require a tedious scheme of successive approximations. In this note a numerical 6 by 6 correlation matrix is exhibited with two proper solutions for its resolution into 3 general factors and 6 specifics. Closely similar matrices may lead to but one solution. *Albert A. Bennett* (Providence).

Ottestad, Per: On the use of the factorial moments in the study of discontinuous frequency distributions. Skand. Aktuarie Tidskr. H. 1/2, 22—31 (1939).

In seeking to fit a frequency function of suitable type to a given statistical series a well-known method used by Guldberg compares the moments and semi-invariants for the data with corresponding statistics for the functions proposed. These methods are often useless in biology and other empirical sciences due to the paucity of available data. The factorial moments especially due to Steffensen (1923), and their ratios are found to be admirably suited to handle these cases. Instances of binomial, Poisson, Pascal, and hypergeometric frequency functions are verified in connection with data found in the previous literature. *Albert A. Bennett* (Providence).

Mises, R. v.: An inequality for the moments of a discontinuous distribution. Skand. Aktuarie Tidskr. H. 1/2, 32—36 (1939).

The following theorem is announced, proved, and discussed. Let $p(x)$ be any positive-valued function defined for certain real values, x_i, (at least two in number) where $\sum p(x_i) = 1$. As usual, if it exists, the absolute moment M_v of order v about the arithmetic mean $\bar{x}$, $(= \sum x_i p(x_i))$ is defined as $\sum |x_i - \bar{x}|^v p(x_i)$. Let c be the interval between two consecutive x_i's. ("Consecutive" seems to mean, tacitly, consecutive in magnitude, not necessarily in sequence.) The theorem states that $c \cdot M_v \leqq 2 M_{v+1}$ (for $v \geqq 1$) if M_{v+1} exists. For no v can the factor 2 be replaced by a smaller number. *Albert A. Bennett* (Providence).

Versicherungsmathematik und verwandte Anwendungen:

Vajda, Stefan: Die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Auszahlungssumme. Skand. Aktuarie Tidskr. H. 1/2, 10—21 (1939).

Verf. behandelt unter Benutzung von früher erhaltenen Resultaten (vgl. dies. Zbl. 6, 411) das folgende Problem aus dem Gebiete der Risikotheorie der Lebensversicherung: Sei s eine Anzahl x-jähriger Personen, die dieselbe Versicherung mit Auszahlung beim Tode abschließen, l_{x+m} $(m = 0, 1, \ldots)$ die Sterbetafel und U_m die auf den Beginn der Versicherung diskontierte Differenz zwischen Todesfallzahlung im m-ten Versicherungsjahre und den bis zum Tode im genannten Jahre gezahlten Prämien. Sei ferner $v(m, a_m)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im m-ten Versicherungsjahre a_m Per-

sonen absterben, vorausgesetzt, daß im ersten, ..., $(m-1)$-ten Versicherungsjahre bzw. $a_1, \ldots, a_{m-1}$ Personen abgestorben sind; es ist dann

$$v(m, a_m) = \binom{s_m}{a_m} q_m^{a_m} p_m^{s_m - a_m} \qquad (s_m = s - a_1 - \cdots - a_{m-1}, \; p_m = l_{x+m}/l_{x+m-1}).$$

Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit $f(n, a)$ dafür, daß die Summe $a_1 U_1 + \cdots + a_n U_n$ gleich a sei. Es ist $f(n, a) = \sum_{(a_1, \ldots, a_n)} v(1, a_1) \ldots v(n, a_n)$, mit den Bedingungen $0 \leq a_1 + \cdots + a_n \leq s$ und $a_1 U_1 + \cdots + a_n U_n = a$. — Verf. benutzt die Laplacesche charakteristische Funktion $\Phi_n(t) = \sum_{(a_1, \ldots, a_n)} v(1, a_1) \ldots v(n, a_n) \exp\left(it \sum_{m=1}^{n} a_m U_m\right)$, um die Verteilungsfunktion $f(n, a)$ zu bestimmen und führt die Berechnung von $f(n, a)$ unter gewissen vereinfachenden Annahmen durch. — Die Bedeutung der Funktion $f(n, a)$ für die Risikotheorie wird erwähnt und durch Anwendung auf die Bestimmung der Höhe von Risikofonds beleuchtet. [Ref. macht darauf aufmerksam, daß in der Formel S. 15 für $\Phi_n(t)$ der Faktor $v(1, a_1) \ldots v(n, a_n)$ fehlt, und daß in der Formel S. 19 für $v(m, a_m)$ der Ausdruck $\left(\frac{s_m}{a_m}\right)$ durch $\binom{s_m}{a_m}$ zu ersetzen ist.] *W. Simonsen* (Kopenhagen).

Vajda, Stefan: Die Durchschnittsprämie und das Durchschnittsalter. Verzekerings-Arch. **20**, H (21)—(26) (1939) [Holländisch].

Zur Orientierung über die Frage, wie sich bei einer gegebenen Personengruppe und bestimmter Versicherungskombination das für eine bestimmte Dauer berechnete Durchschnittsalter bei einer Verkürzung oder Verlängerung der Dauer ändert, wird der folgende Satz bewiesen: Für den Barwert einer Erlebensversicherung, einer kurzen Rente, einer gemischten Versicherung und schließlich einer Risikoversicherung ergibt sich bei der gleichen Personengruppe ein um so niedrigeres Durchschnittsalter, je länger die Versicherungsdauer gewählt wird. *Janko* (Prag).

Schönwiese, Rudolf: Neue Sterbetafeln für Leibrentenversicherungen. Bl. Versich.-Math. **4**, 437—459 (1939).

Bericht über die Herstellung der deutschen Rentnersterbetafeln L^{rm} für Männer und L^{rf} für Frauen. *W. Simonsen* (Kopenhagen).

Steller, E. T.: Kritische Betrachtungen über einige Kapitel der Versicherungsmathematik. Verzekerings-Arch. **20**, (27)—(44) (1939) [Holländisch].

Verf. warnt vor unkritischen Anwendungen der Mathematik auf Fragen der Lebensversicherungstechnik und vor unzulässigen Interpretationen von Mittelwertbildungen. *W. Simonsen* (Kopenhagen).

Steller, E. T.: Kritische Betrachtungen über einige Abschnitte der Versicherungskunde. Verzekerings-Arch. **20**, (49)—(60) (1939) [Holländisch].

In Fortsetzung von früheren Betrachtungen (vorsteh. Ref.) werden einige Bemerkungen über die mittlere Zahlungsdauer bzw. den mittleren Tilgungsbetrag bei Anleihen mit variablen Leistungen gemacht. *W. Simonsen* (Kopenhagen).

Polidori, Ciro: La nuova teoria della capitalizzazione e i problemi d'interesse semplice. Period. Mat., IV. s. **19**, 126—140 (1939).

Verf. stellt kurz die Grundbegriffe und -gedanken der bekannten, von Cantelli geschaffenen und von der italienischen Schule, insbesondere von Bonferroni ausgebauten, weittragenden Theorie der „angesammelten Kapitalien" („capitali accumulati") zusammen und weist auf ihre Bedeutung in der bis vor kurzem als trivial angesehenen Theorie der einfachen Verzinsung hin. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Jennett, W. J., and B. L. Welch: The control of proportion defective as judged by a single quality characteristics varying on a continuous scale. J. Roy. Statist. Soc. **6**, Suppl., 80—88 (1939).

Ein industrielles Produkt werde charakterisiert durch eine einzige Angabe, z. B. die Glühlampe durch ihre Lebensdauer. Verff. untersuchen das Verhältnis der Produkte, die einen ganz bestimmten Wert dieser charakteristischen Größe über- oder unter-

schreiten und studieren die Verteilung der charakteristischen Größe in der Teilgesamtheit. *Löer* (Göttingen).

Pankraz, Otomar: On integral relations in economical cinematics. Čas. mat. fys. 68, 132—136 (1939).

Verf. stellt zwei Gleichungen zwischen Produktion und Verbrauch auf für den Fall, daß ein Gebiet nur von einem Produktionszentrum die Waren bezieht und ein Teil der Güter zunächst gelagert wird. *Löer* (Göttingen).

Geometrie.

Grundlagen, Elementargeometrie:

Kubota, Tadahiko: Eine Begründung der elementaren Geometrie. I. Tôhoku Math. J. 45, 197—211 (1939).

Kubota, Tadahiko: Eine Begründung der elementaren Geometrie. II. Tôhoku Math. J. 45, 354—368 (1939).

Im ersten Teil werden elementare Konsequenzen der räumlichen projektiven Verknüpfungsaxione und der Anordnungsaxiome in der affinen Ebene hergeleitet. Der zweite Teil handelt von der affinen Streckengleichheit; es wird die Proportionenlehre auf Grund der Euklidischen Definition der Proportionalität mit Hilfe des Dedekindschen Stetigkeitsaxioms begründet. *Bachmann* (Marburg a. d. L.).

Johansson, Ingebrigt: Darstellung von Kontinuen durch verallgemeinerte homogene Koordinaten. (*Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.*) 9. Congr. des Math. scand. 171—178 (1939).

Zahlen-n-Tupel heißen verallgemeinerte homogene Koordinaten, wenn eine „Fundamentalgruppe" $\mathfrak{F}$ von Transformationen der Gesamtheit der n-Tupel in sich gegeben ist, die die Eigenschaft hat, daß die durch $\mathfrak{F}$ ineinander transformierbaren n-Tupel denselben Punkt darstellen. Für einige spezielle Flächen wird eine Darstellung in verallgemeinerten homogenen Koordinaten und die entsprechende Darstellung der Transformationen der Flächen in sich angegeben. *Bachmann* (Marburg a. d. L.).

Sencer, Süleyman: Axiomatische Theorie der Rauminhalte. Leipzig: Diss. 1938. 35 S. u. 11 Fig.

Es wird eine axiomatische Begründung des Rauminhalts der Polyeder gegeben, die der von v. d. Waerden (Euklidische Meetkunde, Groningen 1937, S. 80) angegebenen Begründung des Flächeninhalts entspricht und sich ebenso wie diese an Euklid anschließt. Es sei im dreidimensionalen euklidischen Raum die Addition von Polyedern erklärt. Es werden axiomatisch für Polyeder eine Äquivalenzrelation $P = Q$ (P ist inhaltsgleich mit Q) und eine Anordnungsrelation $P > Q$ (P hat größeren Inhalt als Q) eingeführt, für die die bekannten Eigenschaften solcher Relationen gelten sollen, insbesondere daß entweder $P = Q$ oder $P > Q$ oder $Q > P$ ist. Kongruente Polyeder sollen inhaltsgleich sein; außerdem werden folgende Axiome gefordert: 1. Kürzungsregeln: aus $P + Q = P' + Q'$ und $Q = Q'$ folgt $P = P'$ und aus $P + Q > P' + Q'$ und $Q = Q'$ folgt $P > P'$, 2. $P + Q > P$, 3. wenn $P > Q$ ist, gibt es ein Polyeder R, so daß $P > Q + R$. Es wird gezeigt: Wenn $P > Q$ ist, so gibt es eine vierseitige Pyramide R, so daß $P = Q + R$ ist. (Nimmt man diesen Satz als Axiom, so läßt sich das Axiomensystem vereinfachen.) Die Polyeder bilden also ein Größensystem, und da das archimedische Axiom in der Geometrie vorausgesetzt wird, ein archimedisches Größensystem. Mit Hilfe der euklidischen Proportionenlehre lassen sich den Polyedern daher reelle Zahlen als Maßzahlen zuordnen. Es werden die bekannten Tatsachen über den Rauminhalt von Parallelepiped, Prisma und Tetraeder hergeleitet und bewiesen, daß zwei Polyeder dann und nur dann gleiche Maßzahl haben, wenn sie inhaltsgleich sind. Zum Schluß wird die Übereinstimmung des so definierten Inhaltsmaßes mit dem Riemannschen bewiesen. *Bachmann* (Marburg a. d. L.).

Feldheim, Ervin: Problèmes sur les triangles inscrits dans un triangle donné. Enseignement Math. **37**, 329—335 (1938).

Prenons deux triangles ABC et $A'B'C'$ et construisons les triangles DEF et $D'E'F'$, circonscrits respectivement à ABC et $A'B'C'$, et tels que les côtés de DEF ($D'E'F'$) soient parallèles aux côtés respectifs de $A'B'C'$ (ABC). Si nous désignons par t, t', T, T' les aires de ABC, $A'B'C'$, DEF, $D'E'F'$, on a la relation $\frac{t}{t'} = \frac{T}{T'}$. Cas spécial. Généralisations.

O. Bottema (Deventer [Niederlande]).

Goormaghtigh, R.: Analytic treatment of some orthopole theorems. Amer. Math. Monthly **46**, 265—269 (1939).

Let B_i ($i = 1, 2, 3$) be the foot of the perpendicular from A_i to a line l. Through B_i draw a line perpendicular to the side opposite A_i; the three lines thus obtained meet in a point called the orthopole of l with respect to the triangle $A_1A_2A_3$. Using complex coordinates the author proves some wellknown theorems concerning this point.

O. Bottema (Deventer [Niederlande]).

Goodstein, R. L.: Rational triangles. Math. Gaz. **23**, 264—267 (1939).

Cantoni, Riccardo: L'equazione dei pentagoni articolati inscrittibili. II. Il discriminante dell'equazione simmetrica. Ist. Lombardo, Rend., III. s. **72**, 165—178 (1939).

Verf. hat schon früher (dies. Zbl. **17**, 369) die Gleichung $S_7(\varrho) = 0$ der Radii $\sqrt{\varrho}$ jener Kreise untersucht, in die ein gegebenes Fünfgelenk eingeschrieben werden kann. Hier wird durch ein teils intuitives, teils analytisches Verfahren die Beschaffenheit der Diskriminante $S_7(\varrho)$ ausfindig gemacht. Dieser Ausdruck, der in den Quadraten der Stablängen a^2, b^2, c^2, d^2, e^2 symmetrisch vom Grade 138 ist, läßt sich in ein Produkt $A_{40}B_{20}C_{60}D_{18}$ von rationalen symmetrischen Faktoren der angegebenen Grade spalten. Die ersten Polynome A, B, C können weiter in rationale symmetrische leicht aufzustellende Faktoren zerlegt werden. Verf. beweist die Irreduzibilität von D_{18}.

D. Barbilian (București).

● **Locher-Ernst, Louis: Geometrisieren im Bereiche wichtigster Kurvenformen. Eine erste Einführung in das geometrische Denken.** Zürich u. Leipzig: Orell Füssli Verl. 1938. 64 S. u. 51 Abb. RM. 2.90.

Das Buch stellt einen Versuch dar, das Phänomen des geometrischen Erlebnisses psychologisch, erkenntniskritisch und metaphysisch (letzteres im Sinne Rudolf Steiners und Blaise Pascals) zu deuten. Das mathematische Objekt der Untersuchung sind Kurven, die mittels einer oder zweier Scharen konzentrischer Kreise gewonnen werden, deren Radien eine arithmetische oder geometrische Folge bilden; das sind Ellipsen, Hyperbeln, Cardanische Ovale, Cassinische Kurven, elliptische und hyperbolische Logarithmoiden, Spiralen. An ihnen wird die Einbettung eines Sachverhaltes in ein natürliches Ganze, die Zusammenfa sung räumlich verschiedener Formen unter einen einheitlichen Gesichtspunkt, die Ableitung von Gesetzmäßigkeiten u. ä. erläutert.

Harald Geppert (Gießen).

Algebraische Geometrie:

Baidaff, B. I.: Skizze der komplexen analytischen Geometrie. Andere Darstellung der Punkte mit zwei komplexen Koordinaten. Bol. mat. **12**, 85—90 (1939) [Spanisch].

Comessatti, Annibale: Una questione elementare studiata con mezzi superiori. Saggio sul problema delle sezioni di un diedro. Boll. Un. Mat. Ital., II. s. **1**, 145—160 e 236—258 (1939).

Verf. untersucht die Gesamtheit der Ebenen, die ein gegebenes Ebenenpaar vom Winkel φ unter dem Winkel ϑ schneiden und durch einen festen Punkt der Schnittkante gehen. Diese Ebenen umhüllen einen elliptischen Kegel der Ordnung 8 und Klasse 4. Dieselbe Frage läßt sich auch dual formulieren, und in der elliptischen Metrik ist es die Frage nach der Gesamtheit der Geraden, die aus zwei festen Geraden einen Abschnitt bestimmter Länge ausschneiden. Die Durchrechnung zeigt, daß die Kurve elliptisch ist und, je nachdem $\varphi > \vartheta$ oder $< \vartheta$ ist, verschiedene Realitätsverhältnisse darbietet, während sie für $\varphi = \vartheta$ rational ist. Im § 3 findet sich dann die Einführung

der elliptischen Integrale und die damit verknüpfte Uniformisierung des Problems. Der letzte Paragraph enthält dann eine vertiefte Realitätsuntersuchung der Singularitäten der Kurve und ihrer Lage. Das Ganze ist ein schönes Beispiel dafür, wie ein denkbar einfaches geometrisches Problem auf klassische Fragen der algebraischen Geometrie führt. *Burau* (Hamburg).

Farina, Mariantonia: Sulle curve piane, algebriche, reali che presentano „massimi d'inclusione". Ist. Lombardo, Rend., III. s. 72, 85—90 (1939).

Eine reelle irreduzible algebraische Kurve C n-ter Ordnung hat nach Harnack höchstens $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ relle Züge, von denen nach Hilbert für ungerades bzw. gerades $n \geqq 4$ höchstens $\frac{1}{2}(n-3)$ bzw. $\frac{1}{2}(n-2)$ gerade Züge ineinandergeschachtelt sind. Diese Extrema werden erreicht. Sind α, β zwei sich ausschließende gerade Züge und P bzw. Q je ein Punkt innerhalb derselben, so sei r die Gesamtzahl gerader Züge, die P, aber nicht Q einschließen, s die Zahl der Q, aber nicht P einschließenden und t die Anzahl der P und Q umschließenden Züge; dann ist $r+s+t \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$; wird Gleichheit erreicht, so spricht man von einer Höchstschachtelung des Typus (r, s). G. Biggiogero [Ist. Lombardo Rend., II. s. 55, 499 (1922); 56, 841 (1923)] hat für $n = 4m$ $(m \geqq 1)$ und $n = 4m+1$ Kurven mit der Höchstzahl gerader Züge konstruiert, die die Höchstschachtelung des Typus (m, m) aufweisen, und ebenso für $n = 4m+2$ solche mit der Höchstschachtelung $(m+1, m)$. Verf. konstruiert in Ergänzung dieser Arbeit für $n = 4m+3$ Kurven mit der Höchstschachtelung vom Typus $(m+1, m)$. Bei allen diesen Typen ist $t = 0$, und r und s kommen sich so nahe, wie überhaupt möglich. *Harald Geppert* (Gießen).

Brusotti, Luigi: Fasci reali di curve algebriche sopra una quadrica reale. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 72, 3—9 (1939).

L'Auteur démontre: dans chaque famille de courbes algébriques sur une quadrique réelle á points hyperboliques il y a des faisceaux algébriquement génériques ayants les points-base et les points du groupe Jacobien tous réels. Sur une quadrique à points elliptiques, il n'en est pas de même. *Mario Villa* (Milano).

Warnock, W. G.: Triple systems as ruled quadrics. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 476—480 (1939).

Einige Bemerkungen über einfache Dreiersysteme, die mit 7 Elementen gebildet werden können. Es gibt 30 solche Dreiersysteme. Wenn ein System ausgewählt wird, so gibt es unter den 29 anderen genau 8, die mit ihm kein Dreier-, 14, die mit ihm 1 Dreiersystem, und 7, die mit ihm 3 Dreiersysteme gemein haben. Wenn die 7 Elemente als Geraden im Raume aufgefaßt werden, so bekommt man eine Konfiguration von Quadriken, deren Schnittlinien zu betrachten sind. *E. G. Togliatti* (Genova).

Faedo, S.: Sulla rappresentazione sul piano doppio di due superficie razionali del quarto ordine. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 206—212 (1939).

Durch Projektion einer algebraischen Fläche F aus einem Punkte M auf einer Ebene π, entsteht eine mehrfache Ebene, mit einer Verzweigungskurve γ. Ist P ein Doppelpunkt für F, so ist der Inzidenzpunkt P' der Geraden MP mit der Ebene π singulär für γ; die Komposition der Singularität von F in P kann bestimmt werden aus der Singularität der Kurve γ in P' und umgekehrt. Ist z. B. P ein allgemeiner Doppelpunkt für F, so gilt dies ebenfalls für P' in bezug auf γ; ist P ein Selbstberührungspunkt, so ist P' vierfach für γ; ist P ein Doppelpunkt mit einem unendlich benachbarten Selbstberührungspunkt, so besteht die Singularität von γ in P' aus zwei unendlich benachbarten dreifachen Punkten. In analoger Weise kann man die Komposition eines mehrfachen Punktes P_1 von F, der unendlich benachbart einem Doppelpunkte P sei, bestimmen, wenn man die Singularität der Verzweigungskurve der mehrfachen Ebene, die man aus F durch Projektion aus P erhält, im Punkte P', der aus P_1 entsteht, betrachtet. — Nun existieren, nach Noether (Math. Ann. 33), zwei rationale Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt P, der kein Selbstberührungspunkt ist: die sogenannten $F_4^{(2)}$ und $F_4^{(3)}$. Durch Projektion der Flächen $F_4^{(2)}$ und $F_4^{(3)}$ aus P, erhält man eine Doppelebene mit einer Verzweigungskurve der sechsten Ordnung mit einem vierfachen Punkte bzw. mit zwei unendlich benachbarten dreifachen Punkten. Man könnte daher vermuten, daß für die $F_4^{(3)}$, unendlich nahe an P, ein Punkt P_1 existiere, der ein Doppelpunkt

mit einem unendlich benachbarten Selbstberührungspunkt sei. Aber einerseits kann eine solche Singularität für eine Fläche nicht existieren; andererseits ist der Punkt P_1 selber, nach Noether, sowohl für die $F_4^{(2)}$ wie für die $F_4^{(3)}$ ein Selbstberührungspunkt, der für die $F_4^{(3)}$ spezialisiert ist. Man kommt so zu einem scheinbaren Paradoxon, das vom Verf. in verschiedenen Weisen erklärt wird. Im Grunde hängt die Erscheinung davon ab, daß für die $F_4^{(3)}$ die Gerade PP_1 der Fläche angehört. *Conforto* (Rom).

Bonera, Piero: Sui punti doppî improprî delle superficie razionali nello spazio a quattro dimensioni. Ist. Lombardo, Rend., III. s. **72**, 73—84 (1939).

Nach Severi heißt ein Doppelpunkt einer algebraischen Fläche F_n des S_4 uneigentlich, wenn der allgemeine durch ihn gehende Hyperebenenschnitt dasselbe Geschlecht p aufweist wie der allgemeine Hyperebenenschnitt von F_n. Ist F_n rational, so kann sie mittels eines vierdimensionalen linearen ebenen Kurvensystems Φ auf die Ebene birational bezogen werden. Verf. nimmt an, daß das Vollsystem $|\Phi|$ regulär sei und bei der vorweggenommen gedachten Cremonatransformation auf die niedrigste Ordnung lauter unabhängige und nicht benachbarte Basispunkte annimmt. Ist dann J die Zeuthen-Segresche Invariante von F_n, so bestimmt Verf. die Zahl ihrer uneigentlichen Doppelpunkte zu: $d = \frac{1}{2}(n-2)(n-3) + J - 5p$. Liegt die zu F_n gehörige Normalfläche in einem Raume von $\theta + 4$ $(\theta \geqq 0)$ Dimensionen und hat Φ σ Basispunkte und keine Fundamentalkurven, so findet man die Beziehung: $2(5\theta + \sigma - d + 17) = n(15-n)$ und kann damit insbesondere die Typen rationaler F_n des S_4 angeben, die von uneigentlichen Doppelpunkten frei sind, indem man die entsprechenden niedrigsten Systeme Φ klassifiziert. Für $\sigma < 9$ wird diese Einteilung vollständig erledigt. *Harald Geppert* (Gießen).

Franchetta, Alfredo: Su alcuni esempi di superficie canoniche. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. **3**, 23—28 (1939).

Die Arbeit entwickelt ein Verfahren zur Konstruktion kanonischer Flächen F_n des S_3, d. h. mit $p_g = 4$, $p^{(1)} = n + 1$. Man läßt die F_n durch Annahme eines singulären Punktes O zu einer rationalen $\overline{F}_n$ ausarten und betrachtet das $\overline{F}_n$ abbildende ebene Kurvensystem $|C|$, das zu O entsprechend eine Fundamentalkurve K aufweist. Die charakteristische Schar der Ebenenschnitte von F_n und daher $\overline{F}_n$ muß zur kanonischen Schar dieser Kurven selbstresidual sein, woraus man leicht die Gleichungen gewinnt:

$$|2C| = |hK + C'|, \qquad |C| = |(h-1)K + K'|, \qquad (*)$$

in denen h die Vielfachheit der adjungierten Flächen in O bezeichnet. Da C dreidimensional sein soll, wird $h = 2$ gesetzt; K muß das virtuelle Geschlecht 3 haben, und die Beziehungen (*) ermöglichen die arithmetische Bestimmung der Charaktere von C und K. Ist t die Zahl der Basispunkte von C, so muß $n + t = 25$, $5 \leqq n \leqq 15$ sein, und sind unter den t Basispunkten wenigstens drei einfache gelegen, so sichert die arithmetische Lösung auch die geometrische Existenz von $|C|$. Verf. geht nun von Kurven K der Ordnung $\leqq 19$ aus und findet demgemäß Systeme $|C|$ vom Grade $n = 5, 6, \ldots 11$. Die entsprechenden rationalen Flächen $\overline{F}_n$ hängen von $33 - 2n$ Moduln ab. Hat $\overline{F}_n$ lediglich eine Doppelkurve D, die nicht durch O geht, so beweist man leicht die Existenz von Flächen F_{n-5}, die zu $\overline{F}_n$ subadjungiert sind, und die Linearkombination von $\overline{F}_n$ mit $2 \cdot F_{n-5} + F_{10-n}$ führt zu einer kanonischen Fläche F_n, die nicht mehr durch O geht. So werden neue Typen kanonischer Flächen des S_3 mit $p^{(1)} = 6, 7, \ldots 11$ gefunden. *Harald Geppert* (Gießen).

Godeaux, Lucien: Sur la construction d'une surface algébrique irrégulière. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 2045—2047 (1939).

Φ sei die von Traynard (Ann. École norm. **1907**) studierte hyperelliptische Fläche vierter Ordnung mit 32 Geraden, nämlich zwei Systemen von je 16 windschiefen Geraden a bzw. a'. Φ läßt sich zu je einer Picardschen Fläche F bzw. F' durch eine (1, 2)-Korrespondenz in Beziehung setzen, deren Verzweigungskurve aus den Geraden a bzw. a' besteht. Werden Punkte von F und F', die dem gleichen Punkte von Φ entsprechen einander zugeordnet, so entsteht zwischen F und F' eine (2, 2)-Korrespondenz,

deren homologe Punktepaare den Punkten einer Fläche F_0 birational entsprechen mögen. Dann ist F_0 eine irreguläre Fläche mit $p_a = 31$, $p_g \geqq 35$, die sich den bisher untersuchten Typen irregulärer Flächen nicht einordnet. *Harald Geppert* (Gießen).

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces irrégulières possédant une involution cyclique régulière. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége 8, 266—270 (1939).

Es sei F eine algebraische Fläche F der Irregularität $q > 1$; auf ihr existiere eine zyklische Involution J von Primzahlordnung p, die nur eine endliche Anzahl von Deckpunkten hat; die Gruppen von je p in J homologen Punkten mögen ferner birational den Punkten einer regulären Fläche vom Divisor 1 entsprechen. Dann kann man eine weitere algebraische Fläche F_0 der Irregularität $\geqq q$ herstellen, die ihrerseits eine deckpunktfreie Involution der Ordnung p trägt, und so daß die Gruppen dieser Involution birational den Punkten von F entsprechen. *Harald Geppert.*

Morin, U.: Sulle varietà algebriche che contengono un sistema di curve razionali. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 9, 123—139 (1938).

Für algebraische Flächen, die ein rationales Büschel irreduzibler rationaler Kurven C tragen, besagt der Satz von Noether, daß sie rational sind und sich so auf eine Ebene abbilden lassen, daß die C in Geraden eines Büschels übergehen. Für V_r $(r \geqq 3)$ gilt ein Analogon weder zum ersten noch zum zweiten Teil des Satzes. Daher ermittelt die vorliegende Arbeit eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine irreduzible V_{r-1}, die ein rationales, r-2-dimensionales System irreduzibler rationaler Kurven C vom Index 1 trägt, birational so auf einen S_{r-1} beziehbar sei, daß dabei den C die Geraden eines Sternes entsprechen; sie lautet dahin, daß die V_{r-3}, deren Punkte birational den Kurvenpaaren, in die die reduziblen Kurven C zerfallen, entsprechen, in zwei Mannigfaltigkeiten zerfalle. Algebraisch kann man diesem Satze folgende äquivalente Form geben: Eine irreduzible Gleichung $f(x_0, x_1 \ldots x_{r-1}) = 0$ $(r > 3)$, in der f ein Polynom n-ten Grades und in x_0, x_1 nur vom zweiten Grade ist, ist dann und nur dann durch rationale, nach t rational auflösbare Gleichungen der Form $x_i = \varphi_i(x_2 \ldots x_{r-1}, t)$, $(i = 0,1)$ aufzulösen, wenn bei Auffassung von x_0, x_1 als Variabler und $x_2 \ldots x_{r-1}$ als Parameter die Trennung der Komponenten im allgemeinen reduziblen Kegelschnitt $f = 0$ sich rational in den $x_2 \ldots x_{r-1}$ vollziehen läßt.

Harald Geppert (Gießen).

Keller, Ott-Heinrich: Ganze Cremona-Transformationen. Mh. Math. Phys. 47, 299—306 (1939).

Es gibt Integritätsbereiche, die eine Basis $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ besitzen, mit deren Hilfe sich jedes Element als Polynom $\sum \lambda_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ mit ganzzahligen λ darstellen läßt. Ist $(y_1 y_2 \ldots y_n)$ eine andere ähnliche Basis desselben Integritätsbereiches, so besteht zwischen den x_i und den y_i eine ganze Cremonatransformation: die y_i müssen sich als Polynome in den x_i (und ebenso die x_i als Polynome in den y_i) mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen lassen. Die zwei Funktionaldeterminanten der Transformation sind gleich ± 1. Die x_i und die y_i sind hier als inhomogene Punktkoordinaten aufzufassen. Diese Betrachtungen führen zur Frage, ob eine Cremonatransformation, die sich in der einen Richtung durch Polynome mit der Funktionaldeterminante 1 darstellen läßt, dies auch notwendig in der anderen Richtung tut. Diese Frage ist zu bejahen. Der Beweis wird mit topologischen Methoden geführt. Zunächst wird die erste Homologiegruppe eines projektiven Raumes S_n bestimmt, aus dem einige algebraische V_{n-1} herausgenommen sind; es zeigt sich, daß deren Anzahl und der größte gemeinsame Teiler ihrer Grade die einzigen Invarianten der Gruppe sind. Es folgt daraus, daß in einer Cremonatransformation die Anzahl und die größten gemeinsamen Teiler der Grade der Haupthyperflächen in den beiden Räumen einander gleich sind. Der gewünschte Satz ist dann eine unmittelbare Folge. *E. G. Togliatti* (Genova).

Coble, A. B.: Cremona transformations with an invariant rational sextic. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 285—288 (1939).

Soit S une sextique plane rationnelle ayant dix points doubles $P_1, P_2, \ldots, P_7, A, B, C$.

Considérons les trois faisceaux de Halphen $|H|$, $|H'|$, $|H''|$, de sextiques ayant pour points doubles $P_1, P_2, \ldots, P_7$ et, respectivement, B et C, C et A, A et B. Pompilj (voir ce Zbl. 18, 328) a construit, au moyen des faisceaux $|H|$, $|H'|$ $|H''|$, trois transformations birationnelles T, T', T'' dont le produit R a pour courbe de points unis la courbe S. Reprenant la question, Coble décompose chacune des transformations T, T', T'' en produit d'involutions de Bertini et montre que les points de S ne peuvent être tous unis pour la transformation birationnelle R. Il donne les caractéristiques de cette transformation (ordre et points fondamentaux). *L. Godeaux* (Liége).

Differentialgeometrie:

Fischer, Helmut Joachim: Kurven, in denen ein Zug von Sehnen gleicher Länge sich unabhängig vom Ausgangspunkt schließt. Deutsche Math. 4, 228—237 (1939).

Herleitung einer Funktionalgleichung für diejenigen geschlossenen stetigen Kurven, in denen ein Zug von n Sehnen gleicher Länge sich unabhängig vom Ausgangspunkt schließt. Diskussion und Umgestaltung der Gleichung. In den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ gelingt es dem Verf. die Lösungen analytisch in geschlossener Form anzugeben. Gleitkurven für starre n-Ecke. *O. Bottema* (Deventer [Niederlande]).

Turrière, Émile: Sur les raccordements progressifs à centre conservé. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 9, 150—154 (1938).

Sur l'emploi de la lemniscate de Bernoulli dans les questions de raccordements progressifs dans le cas de la conservation du centre. L'auteur démontre qu'il est inutile de faire appel à des tables numériques, puisque l'équation rigoureuse est susceptible d'être présentée sous une forme simple. Emploi des tables de fonctions hyperboliques. *O. Bottema* (Deventer [Niederlande].)

Turrière, Émile: Essai sur une théorie générale d'une classe de courbes de transition pour les raccordements progressifs. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 9, 127—150 (1938).

Les principales courbes de transition pour les raccordements progressifs entre un alignement droit et un arc de cercle rentrent dans un type de courbes à point d'inflexion simple, pour lesquelles le développement analytique de l'abscisse curviligne s en fonction de l'inclinaison α de la tangente est de la forme: $s = c \cdot \sqrt{\alpha}(1 + A\alpha^2 + B\alpha^4)$. L'auteur étudie cettes courbes en général et considère des cas spéciaux (parabole cubique, clothoïde, la courbe élastique, la lemniscate de Bernoulli, la radioïde pseudo-elliptique). Calcul du jarret (point de courbure maxima); formule de surlargeur, formules empiriques pour les diverses radioïdes. Quelques radioïdes nouvelles. *O. Bottema* (Deventer [Niederlande].)

Joss, Hans: Einige infinitesimale geometrische Transformationen ebener Kurven mit besonderer Berücksichtigung ihrer Wirkung auf die Kurvenkrümmung. Bern: Diss. 1939, 39 S. u. 5 Fig.

$\mathfrak{x}(\lambda, \tau)$ sei eine ebene Kurvenschar mit dem Kurvenparameter λ und dem Scharparameter τ; $\mathfrak{t}, \mathfrak{n}$ seien Tangenten- bzw. Normaleneinheitsvektor, $\varkappa$ die Krümmung. Die Scharkurven sollen auseinander durch eine infinitesimale Transformation T der besonderen Form $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \tau} = v\mathfrak{n}$, die also senkrecht zur Kurve mit der Intensität $v(\lambda, \tau)$ erfolgt, hervorgehen. Dann heißen $u = \left|\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \lambda}\right|$ und $v = \left|\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \tau}\right|$ die charakteristischen Funktionen von T. Neben die Frenetformeln für die Scharkurven treten dann diejenigen für die Bahnkurven von T: $\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial \tau} = \frac{1}{u}\frac{\partial v}{\partial \lambda}\mathfrak{n}$; $\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial \tau} = -\frac{1}{u}\frac{\partial v}{\partial \lambda}\mathfrak{t}$ und deren Integrabilitätsbedingung: $\frac{\partial}{\partial \tau}(u\varkappa) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)$. Sind dann $u, v, \varkappa$ genügend oft differenzierbar, so führt T eine geschlossene Kurve wieder in eine solche über. Besonderes Interesse verdienen die Transformationen, bei denen v nur von $\varkappa$ abhängt. Ist speziell $v = \varkappa$, so wird ein Bogen positiver Krümmung wieder in einen solchen übergeführt.

Des weiteren befaßt sich Verf. mit der Bestimmung der Kurvenschar $\mathfrak{x}(\lambda, \tau)$ bei vorgegebenen charakteristischen Funktionen u, v; sie wird auf die Lösung einer Laplaceschen Differentialgleichung zurückgeführt. Ist speziell $u = \pm v$, so vermittelt die Kurvenschar zusammen mit den orthogonalen Bahnkurven eine konforme Abbildung zwischen der λ, τ-Ebene und der $\mathfrak{x}$-Ebene. Zwei weitere Beispiele beziehen sich auf die Fälle $v = \sqrt{1 - \varkappa^{-2}}$ und $v = \varkappa^{-1}$. *Harald Geppert* (Gießen).

Seifert, L.: Contribution à la géometrie descriptive du conoïde de Plücker. Čas. mat. fys. **68**, 1—6 u. franz. Zusammenfassung 6—7 (1939) [Tschechisch].

Verf. untersucht analytisch gewisse Raumkurven auf dem Plückerschen Konoid und die abwickelbaren Flächen, welche von den Tangentialebenen des Konoids längs dieser Raumkurven umhüllt werden. Die Doppelgerade des Konoids sei vertikal. Dann sind die Grundrisse der betrachteten Flächenkurven auf eine horizontale Ebene vierblättrige Rosenkurven, welche den Grundriß der Doppelgeraden zum Mittelpunkt und in ihm die Grundrisse der Torsallinien zu Tangenten haben. Der Aufriß der Flächenkurven auf eine Symmetrieebene des Konoids ist von der dritten Ordnung, sie selbst ist eine rationale Kurve sechster Ordnung. Aus den Kuspidalpunkten des Konoids wird sie durch Kegel vierter Ordnung projiziert, die von horizontalen Ebenen nach Kappakurven geschnitten werden. — Die Tangentialebenen des Konoids in den Punkten einer solchen Raumkurve sind gegen die Doppelgerade gleich geneigt, umhüllen demnach eine abwickelbare Böschungsfläche. Sie schneiden das Konoid nach Ellipsen, deren Mittelpunkte auf einem Kreis in der horizontalen Mittelebene des Konoids liegen. Die Rückkehrkante der abwickelbaren Böschungsfläche ist eine Schraubenlinie des sie enthaltenden vertikalen Zylinders. Die Basiskurve dieses Zylinders in einer horizontalen Ebene ist eine Astroide. Die Schraubenlinie selbst ist eine rationale Kurve sechster Ordnung, die auch auf einem einschaligen Drehhyperboloid liegt. Die Polarkurve dieser Schraubenlinie (Ort der Mittelpunkte ihrer Schmiegungskugeln) ist ebenfalls eine Schraubenlinie, die auf einem geraden Zylinder mit einer Astroide als Querschnitt und auf einem einschaligen Drehhyperboloid liegt. Die abwickelbare Fläche konstanter Böschung ist von der vierten Klasse und Hüllfläche einer Schar von Flächen 2. Klasse, und zwar von Paraboloiden. Die Berührungskurve eines solchen Paraboloides mit der Hüllfläche ist eine Kurve vierter Ordnung, die auf dem Plückerschen Konoid und auf einem vertikalen Drehzylinder liegt. *W. Schmid* (Brünn).

Grünbaum, Siegfried: Über die Bestimmung von Flächen aus ihrer Normalkrümmung längs einer Schar geodätischer Linien. Comment. math. helv. **11**, 336—361 (1939).

Ziel der Arbeit ist der Nachweis dafür, daß ein analytisches Flächenstück F durch Angabe seiner Normalkrümmung k_n längs eines Feldes geodätischer Linien $v = \text{const}$ sowie geeigneter Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt ist. Ist u die Bogenlänge der geodätischen Linien, von einer Orthogonaltrajektorie $u = 0$ aus gemessen, $\varkappa = k_n$ und τ ihre Krümmung bzw. Windung, so kommt es darauf an, aus dem gegebenen $\varkappa(u, v)$ die Größe $\tau(u, v)$ zu bestimmen, denn dann sind die geodätischen Linien selbst und damit die Fläche als ihre Hülle bestimmt. Aus der Beziehung $ds^2 = du^2 + G\,dv^2$ findet man leicht $\tau = \frac{1}{G}\left\{\int\limits_0^u \varkappa_v \sqrt{G}\,du + (\tau G)_{u=0}\right\}$, und es bleibt die Aufgabe, $G(u, v)$ aus $\varkappa(u, v)$ zu berechnen. Dies leistet Verf. durch Potenzentwicklung des Ortsvektors $\mathfrak{x}(u, v)$ in der Umgebung von $u = 0$ nach Potenzen von u. Ist zunächst $u = 0$ ein Punkt, d. h. liegen geodätische Polarkoordinaten $u = r$, $v = \varphi$ vor, so muß sich nach Euler $\varkappa(0, \varphi)$ durch die Hauptkrümmungen $\varkappa_1, \varkappa_2$ in der Form $\varkappa(0, \varphi) = \varkappa_1 \cos^2\varphi + \varkappa_2 \sin^2\varphi$ darstellen; es wird $\tau(0, \varphi) = -\frac{1}{2}\varkappa_\varphi(0, \varphi)$, und alle Ableitungen von τ nach r, φ sind für $r = 0$ schrittweise durch $\varkappa$ und seine Ableitungen ausdrückbar; dasselbe gilt dann von der Entwicklung für $G(r, \varphi) = r^2 + r^4\left(-\frac{1}{3}\varkappa^2 + \frac{1}{12}\varkappa_\varphi^2 - \frac{1}{6}\varkappa\varkappa_{\varphi\varphi}\right)_{0,\varphi} + \cdots$. Ist $u = 0$ aber eine Kurve mit der Bogenlänge v, Krümmung $\varkappa^*$, Windung τ^* und dem Stellwinkel $\theta(v)$ zwischen Haupt- und Flächennormale, so wird $\tau(0, v) = -\tau^* - \frac{d\theta}{dv}$, und wiederum sind alle Ableitungen von τ an der Stelle $0, v$ durch $\varkappa, \varkappa^*, \tau^*, \theta$ und deren Ableitungen ausdrückbar, und dasselbe gilt von der Entwicklung für

$$G(u, v) = 1 + u \cdot 2\varkappa^* \sin\theta + u^2\left[\varkappa^{*2}\sin^2\theta - \varkappa\varkappa^*\cos\theta + \left(\tau^* + \frac{d\theta}{dv}\right)^2\right]_{0,v} + \cdots.$$

Es gilt also der Satz: Eine analytische Fläche F ist durch Vorgabe ihrer Normalkrümmung k_n längs aller durch einen Punkt gehenden geodätischen Linien bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt; wird k_n längs eines beliebigen Feldes geodätischer Linien vorgegeben, so ist F durch einen dazu orthogonalen Anfangsstreifen eindeutig bestimmt. Man nennt daher $k_n(u, v)$ die natürliche Gleichung der Fläche. Zum Schluß bestimmt Verf. alle Flächen, für die längs eines beliebigen bzw. durch einen Punkt gehenden Feldes geodätischer Linien $\varkappa(u, v) = \text{const}$, $\tau(u, v) = \text{const}$ oder $\varkappa = \varkappa(u)$, $\tau(u, v) = \text{const}$ ist. Der Fall $\varkappa = \text{const}$ und $\tau = \text{const}$ tritt nur bei allgemeinen Röhrenflächen und Regelflächen, Kreiszylinder und Kugel auf. *Harald Geppert.*

Strazzeri, Vittorio: Sulla funzione caratteristica di Weingarten. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 321—325 (1938).

Si considerano, nello spazio euclideo a 3 dimensioni, due superficie Σ e Σ_1 corrispondentisi per ortogonalità di elementi. Siano P e P_1 punti corrispondenti, Γ e Γ_1 curve corrispondenti passanti rispett. per P e P_1 di Σ e Σ_1. — Sia inoltre n la normale in P a Σ, g_1 la parallela ad n per P_1; R la rigata luogo di n lungo Γ e G_1 la rigata luogo di g_1 lungo Γ_1. Il rapporto fra il parametro distributore lungo g_1 di G_1 e la distanza, su n, di P dalla linea di stringimento di R è indipendente da Γ e uguale al valore della funzione caratteristica di Weingarten in P. Seguono alcune applicazioni.

E. Bompiani (Roma).

Lebel, J.: Paraboloïdes homofocaux et surface minima de Henneberg. Quadriques homofocales et surfaces minima doubles correspondantes. Bull. Sci. math., II. s. **63,** 173—181 (1939).

Dans ce petit article, particulièrement élégant, l'auteur retrouve la surface minima d'Henneberg qui est la surface minima double la plus simple: il la déduit d'une famille de paraboloïdes homofocaux; le même procédé, appliqué à une famille de quadriques homofocales à centre, donne une nouvelle surface minima double, algébrique, de genre un cette fois. — Les quadriques d'une famille homofocale ont pour enveloppe une développable D isotrope, formant l'ensemble des deux nappes focales de la congruence des génératrices du premier système (et aussi de la congruence relative à l'autre système, remarque valable pour une famille de ∞^1 quadriques). Si F_1, F_2 sont les points focaux d'une génératrice G, si m_1, m_2 sont les points où les génératrices de D issues de F_1 ou F_2 touchent la courbe minima M, arète de rebroussement de D, le milieu m de $m_1 m_2$ engendre la surface minima double S annoncée, tandis que le plan médiateur de $F_1 F_2$ est tangent à S en m. Cette étude donne une belle application géométrique des formules de Legendre-Jacobi pour les fonctions elliptiques. — A signaler toutefois un grand nombre de coquilles typographiques qui n'altèrent pas l'exactitude des résultats, mais rendent la lecture pénible: ainsi c'est (dnu) et $(-dnv)$ qui sont conjuguées (voir formules 16) et non dnu, dnv pour ne citer qu'un exemple.

Gambier (Paris).

Cartan, Elie: Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques. Math. Z. 45, 335—367 (1939).

In einem $(n+1)$-dimensionalen elliptischen Raum werden Polynome $F(x)$ dritten Grades gesucht, welche die folgenden Eigenschaften haben: $\Delta_1 F = \lambda(x_1^2 + \cdots + x_{n+2}^2)^2$; $\Delta_2 F = 0$. Es zeigt sich, daß dieses Problem nur Lösungen gestattet für $n = 3\nu$ und $\nu = 1, 2, 4, 8$. Die geometrischen Eigenschaften des Systems von Hyperflächen $F = C$ werden angegeben. Die Hyperflächen haben nur drei verschiedene Hauptkrümmungen; jede Hauptkrümmung hat die Multiplizität ν. Umgekehrt wird gezeigt, daß es keine anderen Systeme von isoparametrischen Hyperflächen mit nur drei verschiedenen Hauptkrümmungen gibt. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Hjelmslev, Johannes: Infinitesimale Elemente im projektiven Raum. (*Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.*) 9. Congr. des Math. scand. 87—97 (1939).

Auf eine parabolische Projektivität begründet der Verf. sinnreich eine darstellende Geometrie der infinitesimalen Elemente des projektiven Raumes: Es seien O, O_1 und O_2

drei festgelegte Punkte einer Geraden x, auf der O' nach O strebe. Auf der veränderlichen Geraden $PP' = l'$, welche mit $P' \to P$ einer Grenzlage l zustreben soll, werden die Punkte P_2' und P_1' derart bestimmt, daß $P_2' \to P_2 (\neq P)$ auf l strebt und $P P' P_1' P_2' \barwedge OO' O_1 O_2$ gilt. Falls dabei $P_1' \to P_1$ strebt, so werden die infinitesimalen Elemente OO' und PP' durch die Ableitungen OO_1O_2 bzw. PP_1P_2 dargestellt. Mit Hilfe der Dualität in der Ebene und im Raume werden die Betrachtungen auf konvergierende Geraden und Ebenen übertragen. — Das Krümmungselement einer ebenen Kurve k in einem Punkt A mit Tangente t wird durch die Ableitungen tt_1t_2 und AA_1A_2 (auf t) bezeichnet. Wenn M ein Punkt außerhalb t ist, so erzeugen die projektiven Büschel tt_1t_2 und $M(A, A_1, A_2)$ einen Kegelschnitt, der t in A berührt und dasselbe Krümmungselement in A hat wie die Kurve k. — Indem wir im übrigen nur auf die inhaltsreiche Arbeit selbst verweisen können, sei hier doch erwähnt, daß als Beispiel die allgemeinste Form des Meusnierschen Satzes gewonnen wird. *Pimiä* (Helsinki).

Kanitani, Jôyô: Sur les tangentes de Darboux d'une surface plongée dans un espace à connexion projective. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **21**, 220—231 (1939).

E. Cartan (Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. Paris 1937; ce Zbl. **16**, 76) a défini en chaque point A d'une surface S plongée dans un espace à trois dimensions à connexion projective, deux ternes de tangentes généralisant les tangentes de Darboux, dans le cas où les tangentes conjuguées en un point de la surface ne forment pas une involution. L'auteur donne des interprétations géométriques de ces ternes de tangentes, en utilisant la surface image de S dans l'espace projectif tangent à l'espace donné au point considéré. Il est possible de projeter les courbes de Darboux donnant naissance au premier terne, sur le plan tangent à la surface, de manière à obtenir des courbes ayant des points d'inflexion en A, les trois tangentes formant un groupe apolaire au couple des tangentes asymptotiques. En projetant d'un point M du plan tangent les courbes asymptotiques de la surface de telle sorte que les cônes projetant aient un contact du troisième ordre le long de la droite MA, on définit suivant Bompiani trois tangentes issues de A, qui sont les tangentes du second terne de Darboux. *L. Godeaux* (Liége).

Jonas, H.: Intorno ad una classe notevole di cicli formati da quattro trasformazioni di Laplace nello spazio ordinario. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **18**, 23—50 (1939).

Si consideri un doppio sistema coniugato (rete), nello spazio euclideo a tre dimensioni, descritto dal punto x, e la successione delle trasformate di Laplace si componga di quattro superficie descritte dai punti x, $\hat{x}$, x', $\check{x}$ (ciclo). È noto che le diagonali $\Gamma(x, x')$ e $C(x, \check{x})$ descrivono due congruenze $\{\Gamma\}$ e $\{C\}$ che sono W. L'A. dimostra che se si corrispondono le sviluppabili di $\{\Gamma\}$ e $\{C\}$ vi è una coppia di superficie opposte nel ciclo (siano quelle descritte da $\hat{x}$ ed $\check{x}$) appartenenti ad una quadrica: $\{\Gamma\}$ è stratificabile rispetto a $\{C\}$, cioè si possono trovare ∞^1 superficie tali che il piano tangente in un punto di Γ alla superficie che vi passa contenga la corrispondente retta C (ma non viceversa). — Supposto che la quadrica sia una sfera, l'A. esamina l'effetto di una trasformazione B_k del Bianchi sul ciclo; egli aveva già dimostrato (questo Zbl. **16**, 181) che $\{\Gamma\}$ e $\{C\}$ si trasformano, per effetto di B_k, con trasformazioni asintotiche delle falde focali. Egli studia ora le relazioni fra le superficie stratificanti $\{\Gamma\}$ e quelle stratificanti l'analoga congruenza $\{\Gamma_1\}$ del ciclo trasformato; in particolare per B_k singolari ($k = \pm 1$) le rette Γ e C_1, e così Γ_1 e C, sono complanari e i due punti d'incontro descrivono le falde focali di una congruenza W. Qualunque sia B_k, $\{\Gamma\}$ è stratificabile rispetto a $\{\Gamma_1\}$ e viceversa; le superficie stratificanti sono, a coppie, trasformate asintotiche. La loro ricerca coincide con quella delle superficie applicabili sul più generale paraboloide iperbolico. Vengono infine determinate le coppie di sistemi di curve sulla sfera aventi gli stessi piani osculatori. *E. Bompiani* (Roma).

Vranceanu, Giorgio: Gruppi degli spazi a connessione affine con torsione. (*Firenze, 1.—3. IV. 1937.*) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 334—336 (1938).

Etant donné un espace A_n à connexion affine avec torsion, on peut associer à

cet espace n formes biliniéaires (1) $F^a = t^a_{bc} ds^b \delta s^c$, où ds^b sont les différentielles des arcs de n congruences indépendantes et t^a_{bc} sont les composantes de la torsion sur ces congruences. En réduisant les formes (1) a des formes canoniques appropriées, on peut associer à l'espace un groupe de transformations de congruences et considérer ainsi l'espace A_n, comme l'espace d'un groupe. *Autoreferat.*

Buzano, Piero: Determinazione e studio di superficie di S_5 le cui linee principali presentano una notevole particolarità. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **18,** 51—76 (1939).

Verf. bestimmt zwei neue Arten von Flächen im R_5, mit fünf verschiedenen Hauptkurvenscharen, bei denen die Tangentenebenen längs jeder Hauptkurve in einem R_4 liegen, und zeigt, daß sie bis auf Projektivitäten die einzigen sind, bei denen drei der Scharen von Hauptlinien Kegelschnitte sind, die von den R_3 je eines Kegels durch eine feste Ebene ausgeschnitten werden, während diese drei Ebenen, die drei „Scheitel" der Kegel, zu je zweien einen Punkt gemeinsam haben, aber nicht alle in einem festen R_4 liegen. Für die zugehörigen 5-Gewebe vgl. auch P. Buzano, Tipi notevoli di 5-tessuti di curve piane; dies. Zbl. **20**, 259. *Bol* (Freiburg i. Br.).

Ruse, H. S.: Solutions of Laplace's equation in an n-dimensional space of constant curvature. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. **6,** 24—45 (1939).

Let s be the function of the x^i and $\bar{x}^i$ representing the length of the arc of the geodesic joining them in an n-dimensional space of constant curvature K. If $\bar{x}^i$ lies upon a given curve $\bar{x}^i = \bar{x}^i(\tau)$ then $Q = \cos(K^{\frac{1}{2}} s)$ is a function of x^i and τ. The author gives the solutions of the partial differential equation $g^{ij} \nabla_i \nabla_j U = 0$ of the form $U = U(u, \tau)$ where $u = \partial Q / \partial \tau$, τ being a function of the x^i, determined by $Q = 1$. It is shown that u has a geometrical meaning. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Allendoerfer, Carl B.: Rigidity for spaces of class greater than one. Amer. J. Math. **61,** 633—644 (1939).

The author proves the following theorems holding for a Riemannian space R_n in a Euclidean E_{n+p}. If the first normal space of R_n is of $q (\leqq p)$ dimensions at every point and if R_n is of type $\geqq 3$, R_n can be imbedded in an E_{n+q} and this imbedding is unique to within a rigid motion. If the type of R_n is $\geqq 4$ at every point, the Codazzi equations are consequences of the Gauss equations. The type of an R_n is an invariant of the quantity $H_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\varkappa}$. For $q = 1$ it is the rank of $h_{\alpha\beta}$. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Fialkow, Aaron: Totally geodesic Einstein spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **45,** 423—428 (1939).

Verf. behandelt die Einsteinschen Räume E_n mit $n > 3$. Der erste Satz gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Riemannscher Raum V_n ein Einsteinscher sei. Diese Bedingung lautet: Die erste Fundamentalform der V_n kann separiert werden in zwei Komponenten: $g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu = g_{ij}\, dx^i\, dx^j + g_{rs}\, dx^r\, dx^s$ wo: $\lambda, \mu = 1, \ldots, n$; $i, j = 1, \ldots, m$; $r, s = m+1, \ldots, n$ und $1 < m < n-1$. Dabei sind g_{ij} Funktionen der $x^1, \ldots, x^m$, g_{rs} Funktionen der $x^{m+1}, \ldots, x^n$. Die beiden g_{ij} und g_{rs} definieren einen Einsteinschen Raum mit derselben Mittelkrümmung. Der zweite Satz lautet: Eine V_{n+1}, die ∞^1 von parallelen totalgeodätischen E_n gestattet, ist eine E_{n+1} dann und nur dann, wenn jede der E_n eine verschwindende Mittelkrümmung besitzt. Die Mittelkrümmung von E_{n+1} ist dann auch gleich Null. Der dritte Satz gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine einparametrige Familie von untereinander isometrischen E_n als ∞^1 von nichtparallelen totalgeodätischen Hyperflächen in einer E_{n+1} gedeutet werden kann. *Golab.*

Laptew, B.: La dérivée de S. Lie des objets géométriques qui dépendent de point et direction. Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. s. **10,** 4—37 u. franz. Zusammenfassung 37—38 (1938) [Russisch].

Verf. betrachtet zunächst einen Urraum, in dem außer den Punkten (x_i) die durch homogene Koordinaten (p_i) definierten Linienelemente betrachtet werden. Die üblichen Differenzierungen und Tensorbildungen erfahren dann Erweiterungen durch Differenzierungen nach den (p). Durch Schouten und van Kampen (siehe dies.

Zbl. 8, 179) ist das sog. Liesche Differential einer beliebigen Größe bez. eines festgegebenen Vektorfeldes v^i eingeführt worden. Dies wird hier noch allgemeiner für Größen abgeleitet, die außer von den (x) auch noch von den (p) abhängen. Dann erst wird ein affiner Zusammenhang eingeführt und unter Herleitung des entsprechenden umfangreichen Formelapparates untersucht, wie sich die verschiedenen Größen dieser Übertragung bei Anwendung des Lieschen Differentials verhalten. Dasselbe geschieht für den Fall der Räume mit Finslerscher Metrik, wobei zwei verschiedene von Cartan und Berwald herrührende kovariante Differenzierungen in solchen Räumen berücksichtigt werden. Mit Hilfe der Lieschen Ableitung ergeben sich dabei verschiedene Vereinfachungen, wie z. B. bei der Gleichung der Extremalen. *Burau* (Hamburg).

Mutô, Yosio: On the generalized circles in the conformally connected manifold. Proc. Imp. Acad. Jap. **15**, 23—26 (1939).

Jedem Punkte eines konformen n-dimensionalen Raumes sei ein $(n+2)$-dimensionaler Raum als Lokalraum zugeordnet. Mittels der Übertragungsparameter $\Pi^{\varkappa}_{i\lambda}$ läßt sich nun jede Kurve C auf eine Kurve im Lokalraum eines Punktes der Kurve C abbilden. Verf. findet die Differentialgleichung der Kurve, deren Bild ein Kreis ist.
J. Haantjes (Amsterdam).

Radó, T., and P. Reichelderfer: On a stretching process for surfaces. Amer. J. Math. **61**, 645—650 (1939).

Les auteurs étudient les transformations qui permettent „d'étirer" vers son centre le domaine compris entre deux sphères concentriques. L'étude porte particulièrement sur le rapport des aires de deux portions de surfaces homologues. La borne supérieure de ce rapport possède un minimum qui ne peut être atteint par aucune des transformations qui satisfont à certaines conditions, mais qui peut être approché autant que l'on veut par des transformations dont l'article fournit l'expression. L'équation vectorielle de la transformation étant $\overrightarrow{OM'} = \lambda(\varrho)\,\overrightarrow{OM}$ où $\varrho =$ longueur $\overrightarrow{OM}$ le minimum en question est $R^2/(R^2 - r^2)$ et la fonction

$$\lambda_\theta(p) = \begin{cases} \xi^{1/2}/(\xi - r)^{1/2} \cdot R/(k^2 - \xi r)^{1/2} \cdot (\varrho - r)/\varrho & \text{pour} \quad r \leqq \varrho \leqq \xi \\ R/(R^2 - \xi r)^{1/2} \cdot (\varrho^2 - \xi r)^{1/2}/\varrho & \text{pour} \quad \xi \leqq \varrho \leqq R \end{cases}$$

fournit la valeur $R^2/(k - r)[k + r\,(1 - \theta)]$ recherché est la considération par C. B. Morrey (voir ce Zbl. **14**, 108) d'une transformation de cette nature. *E. Blanc* (Toulon).

Miyatake, Osamu: On a characteristic property of the circle. Tôhoku Math. J. **45**, 245—248 (1939).

Verf. beweist analytisch den folgenden Satz: Bewegt sich eine Sehne fester vorgegebener Länge in einer Eilinie und schneidet sie dabei einen Bogen konstanter Länge ab, so ist die Eilinie ein Kreis. Der Beweis benutzt allerdings die dreimalige stetige Differenzierbarkeit der Eilinie. — Der Satz ist, wie Ref. bemerkt, falsch; er ist nur dann richtig, wenn die Länge des abgeschnittenen Bogens nicht der halbe Umfang der Eilinie ist. Im bezeichneten Ausnahmefall ist ein Gegenbeispiel schon von Zindler, Mh. Math. Phys. **31**, 44 (1921), angegeben worden. Über die Gültigkeitsgrenzen des vom Verf. vermuteten Satzes vgl. eine demnächst in der Math. Zeitschr. erscheinende Arbeit des Ref. *Harald Geppert* (Gießen).

Vergnères, Gaston: Sur le contingent de l'ensemble des points de multifurcation. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1968—1969 (1939).

E étant un ensemble fermé de l'espace euclidien, l'auteur désigne pour un point M_0 extérieur à E par ϱ_0 la plus courte distance de M_0 à E, par $S^{\varrho_0}_{M_0}$ la surface de la sphère de centre M_0 et de rayon ϱ_0, par $\omega(M_0)$ l'intersection de E avec $S^{\varrho_0}_{M_0}$, par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des points M_0 de l'espace pour lesquels $\omega(M_0)$ comprend plus d'un point (points de multifurcation de M. Bouligand). Suivant M. Bouligand il nomme plan d'appui concluant de $\omega(M_0)$ un plan d'appui de cet ensemble qui a en commun avec l'enveloppante convexe de $\omega(M_0)$ des points n'appartenant pas à $\omega(M_0)$. Il affirme alors que: si P_0 est un plan d'appui concluant de $\omega(M_0)$ ou un plan limite de tels plans, le rayon issu de M_0, perpendiculaire à P_0, dirigé vers la calotte ouverte découpée sur $S^{\varrho_0}_{M_0}$ par P_0 qui est disjointe de $\omega(M_0)$, appartient au contingent de $\mathfrak{M}$ en M_0;

il indique en outre une condition nécessaire faisant intervenir les points de multifurcation voisins de M_0, pour que le même résultat soit valable pour un plan d'appui P_0 de $\omega(M_0)$ non concluant. *Christian Pauc* (Paris).

Hadwiger, H.: Über die mittlere mittlere Breite zufallsartig gestalteter Polygone. Comment. math. helv. **11**, 321—329 (1939).

Mit N beliebigen Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_N$ werde vom Nullpunkt O ausgehend ein Polygon P_N: $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_N$ gebildet; seine Stützfunktion bezüglich O in Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{e}$ sei $p(\mathfrak{e})$. Dann heißt $\overline{B} = \frac{1}{2\pi}\int p(\mathfrak{e})\,\dot{\mathfrak{e}}$, über die Einheitskugel erstreckt, die mittlere Breite von P_N. Ihr Mittelwert über alle Polygone dieser Art: $\overline{\overline{B}}_N = (4\pi)^{-N}\int \overline{B}\dot{\mathfrak{a}}_1\dot{\mathfrak{a}}_2\ldots\dot{\mathfrak{a}}_N$, über alle Einheitsvektoren integriert, heißt die mittlere mittlere Breite des zufallsartig gestalteten Polygons P_N. Ziel der Arbeit ist die Berechnung der $\overline{\overline{B}}_N$. Diese gelingt durch Berechnung der geometrischen Wahrscheinlichkeiten $f_N(\alpha)$ dafür, daß das zufallsartig gestaltete Polygon ganz in einem O enthaltenden Halbraum liegt, den eine von O um α abstehende Ebene begrenzt; dann wird $\overline{\overline{B}}_N = 2\left\{N - \int\limits_0^N f_N(\alpha)\,d\alpha\right\}$. Verf. findet die ersten drei Werte: $\overline{\overline{B}}_1 = \frac{1}{2}$, $\overline{\overline{B}}_2 = \frac{5}{6}$, $\overline{\overline{B}}_3 = \frac{53}{48}$. Schließlich ermittelt er das asymptotische Gesetz der $\overline{\overline{B}}_N$ für große N; es lautet $\overline{\overline{B}}_N \sim \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sqrt{N}$ und zeigt, da $\overline{\overline{B}}_N$ gegen die Gesamtlänge N von P_N klein wird, daß die zufallsartige Gestaltung der Polygone im Mittel eine Knäuelung erzeugt. *Harald Geppert* (Gießen).

Hadwiger, H.: Über statische Flächen- und Längenmessung. Mitt. naturforsch. Ges. Bern **1938**, LIII—LVIII (1939).

Verf. beschäftigt sich mit folgenden beiden Sätzen: 1. Die Fläche eines ebenen Bereichs ist gleich der mittleren Bedeckungszahl von Gitterpunkten im Einheitsgitter, wenn dieser Bereich auf alle mögliche Weise im Gitter bewegt wird. 2. Die Länge eines Kurvenstücks ist gleich der mittleren Schnittpunktszahl im Geradengitter der Distanz $\frac{2}{\pi}$. Für diese Sätze, die sich exakt aus der Blaschkeschen Integralgeometrie ergeben, wird ein auf einfachen Grundannahmen beruhender Plausibilitätsbeweis gegeben, und alsdann werden die Resultate experimenteller Untersuchungen hierzu angegeben, die eine gute Übereinstimmung mit der genauen Inhaltsrechnung ergeben. *Burau* (Hamburg).

Alexits, Georg v.: Der Torsionsbegriff in metrischen Räumen. Mat. fiz. Lap. **46**, 13—28 (1939) [Ungarisch].

Bezeichne R einen metrischen Raum, p, q zwei Punkte aus R, pq den Abstand der Punkte p, q. Für ein n-Tupel von Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ setze man

$$D(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (p_i p_j)^2 \end{vmatrix}. \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Ist p_1, p_2, p_3, p_4 ein beliebiges Punktequadrupel von R, so bilde man, wenn es nur möglich ist, die Ausdrücke

$$\tau(p_1, p_4; p_2, p_3) = \frac{p_2 p_3}{p_1 p_4}\sqrt{\frac{18\,|D(p_1, p_2, p_3, p_4)|}{D(p_1, p_2, p_3)\cdot D(p_2, p_3, p_4)}},$$

$$\tau_d(p_1, p_2, p_3, p_4) = \sqrt{\frac{18\,|D(p_1, p_2, p_3, p_4)|}{\sqrt{D(p_1, p_2, p_3)\cdot D(p_2, p_3, p_4)\cdot D(p_3, p_4, p_1)\cdot D(p_4, p_1, p_2)}}}.$$

Jede der folgenden drei Zahlen

$$\tau(p) = \lim_{q\to p}\Big(\lim_{r_1, r_2\to p}\tau(p, q; r_1, r_2)\Big), \qquad \tau_{II}(p) = \lim_{p_i\to p}\tau(p_1, p_4; p_2, p_3),$$

$$\tau_d(p) = \lim_{p_i\to p}\tau_d(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

ist zur Definition der Torsion von R geeignet. Wir nennen $\tau(p)$ die metrische Torsion, $\tau_{II}(p)$ die metrische Torsion zweiter Art, $\tau_d(p)$ die Darboux-Egerváry sche Torsion

von R [$\tau_d(p)$ ist ein von Egerváry geeignet umgestalteter, scheinbar etwas vergessener älterer (1896) Darbouxscher Ausdruck]. — Der Name „Torsion" läßt sich für diese Ausdrücke durch folgenden Umstand rechtfertigen: Wenn R eine dreimal stetig differenzierbare Parameterkurve ist, deren Torsion im klassischen Sinn mit $t(p)$ bezeichnet wird, so ist

$$\tau(p) = \tau_{II}(p) = \tau_d(p) = |t(p)|.$$

Die Beziehung $\tau(p) = |t(p)|$ besteht auch dann, wenn nur so viel vorausgesetzt wird, daß die ersten drei Ableitungen der Parameterfunktionen in p existieren und endlich sind. Die Torsionsdefinition $\tau(p)$ ist also auch für Parameterkurven mindestens so weittragend wie die klassische, wogegen es Parameterkurven gibt, für welche $t(p)$ und $\tau(p)$ existieren, $\tau_d(p)$ und $\tau_{II}(p)$ jedoch in einer dichten Menge nicht existieren. Umgekehrt ist aber auch $\tau(p) = \tau_{II}(p) = \tau_d(p) = 0$ möglich, und zwar in jedem Punkte der Parameterkurve R, ohne daß $t(p)$ irgendwo existiert. Das ist z. B. bei jeder nirgends differenzierbaren stetigen ebenen Parameterkurve der Fall. Besitzt R in p eine Mengersche Krümmung, so ist $\tau_{II}(p) = \tau_d(p)$. — Die beiden Ausdrücke $\tau_{II}(p)$ und $\tau_d(p)$ sind, als Punktfunktionen im metrischen Raum R betrachtet, stetig; über die Stetigkeitsverhältnisse von $\tau(p)$ läßt sich dagegen nur folgendes behaupten: Ist R ein metrischer Bogen, auf welchem $\tau(p)$ überall existiert, so ist $\tau(p)$ auf R eine Bairesche Funktion höchstens zweiter Klasse. — Die Torsion zweiter Art $\tau_{II}(p)$ steht in enger Beziehung zu den ebenen Kurven, da die folgende Verallgemeinerung eines klassischen Satzes gilt: Damit der nicht gerade euklidische Bogen C eben sei, ist notwendig und hinreichend, daß in jedem Punkte p von C die Gleichung $\tau_{II}(p) = 0$ bestehe. Hier ist die Euklidizität von C wesentlich, da man leicht einen metrischen, aber nicht euklidischen Bogen C konstruieren kann, für welchen zwar überall $\tau(p) = \tau_{II}(p) = \tau_d(p) = 0$ gilt aber trotzdem C mit keinem ebenen Bogen isometrisch ist. *Autoreferat.*

Topologie:

Tompkins, C.: Fréchet deformations and homotopy. Ann. of Math., II. s. **40**, 392—399 (1939).

Es seien in einem metrischen Raum $C_1 = F_1(C)$ und $C_2 = F_2(C)$ zwei eindeutige, stetige Bilder der Kreislinie C. Sind H_1 und H_2 zwei orientierungstreue topologische Abbildungen von C auf sich, so liefern die Abbildungen F_1H_1 und F_2H_2 neue Parametrisierungen von C_1 und C_2. Es sei $d(H_1, H_2)$ das Maximum der Abstände der Punkte $F_1H_1(P)$ und $F_2H_2(P)$, wobei P den Kreis C durchläuft. Die größte untere Schranke der Zahlen $d(H_1 H_2)$, wobei H_1 und H_2 alle orientierungstreuen topologischen Abbildungen von C auf sich durchlaufen, heißt der Fréchet-Abstand $[C_1, C_2]$ von C_1 und C_2. Eine einparametrige Schar $C(t) = F_t(C)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ von eindeutigen, stetigen Kreisbildern in einem metrischen Raum heißt eine Fréchet-Deformation, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, daß $[C(t_1), C(t_2)] < \varepsilon$ gilt für $|t_1 - t_2| < \delta$. Verf. zeigt: Auf allen $C(t)$ einer solchen Deformation kann man einen Parameter u einführen derart, daß jede Kurve $C(t_0) = C(t_0, u)$ ist, wobei $C(t, u)$ eine in t und u stetige Punktfunktion ist; in diesem Sinne ist eine Fréchet-Deformation eine Homotopie. — Für Bogen wurde das analoge Ergebnis bereits von M. Morse bewiesen (Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 915—922 (1936); dies. Zbl. **15**, 417). *Nöbeling* (Erlangen).

Roberts, J. H.: Note on topological mappings. Duke math. J. **5**, 428—430 (1939).

In dieser Note wird ein interessantes Beispiel einer Baumkurve H von folgender Art gegeben: Bildet man topologisch (eineindeutig und stetig) H auf eine Untermenge von H ab, so muß jede solche Transformation eine Identität sein. Diese Kurve ist als eine Untermenge einer von K. Menger konstruierten Baumkurve definiert.

K. Zarankiewicz (Warschau).

Jones, F. B.: Concerning the boundary of a complementary domain of a continuous curve. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 428—435 (1939).

Author studies the boundary of a complementary domain D of a locally compact continuous curve and the outer boundary of D with respect to any point of the com-

plement of $\bar{D}$, especially continuous curves lying in these sets. He deals in the plane in such a way as to bring out what is essential for the validity of his results. *Pospíšil.*

Waraszkiewicz, Z.: Sur les courbes ε-déformables en arcs simples. Fundam. Math. **32**, 103—114 (1939).

Eine eindeutige, stetige Abbildung einer Menge A eines metrischen Raumes R auf eine Menge $B \subset R$ heißt eine ε-Deformation, wenn jeder Punkt aus A von seinem Bildpunkt einen Abstand $\leqq \varepsilon$ hat. Verf. beweist: Damit das Kontinuum K der Ebene E ε-deformierbar sei in einen einfachen Bogen für jedes $\varepsilon > 0$, ist folgendes notwendig und hinreichend: K zerlegt E nicht und besitzt bez. jedes Punktes P von K folgende Eigenschaft: von je 3 P enthaltenden Teilkontinuen von K ist eines in der Summe der beiden anderen enthalten. *Nöbeling* (Erlangen).

Chogoshvili, George: On the variation of Betti numbers of a moving level surface. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **22**, 293—297 (1939).

In einem beschränkten abgeschlossenen Bereich R eines n-dimensionalen euklidischen oder Riemannschen Raumes mit hinreichend glatter Randmannigfaltigkeit B sei eine nirgends ausgeartete Funktion f der Klasse C'' gegeben, deren kritische Punkte sämtlich im Innern von R liegen und die auf B eine ebenfalls nirgends ausgeartete Funktion f_B darstellt. Im Anschluß an einen Satz von Morse [M. Morse und G. B. van Schaak, Ann. of Math. **35**, 545 (1934); dies. Zbl. **10**, 28] wird folgendes gezeigt: Enthält das abgeschlossene Intervall $a \ldots b$ keine kritischen Werte von f oder f_B, so sind die Niveauflächen der Werte $f = a$ und $f = b$ homöomorph. Enthält das Intervall $a \ldots b$ genau einen kritischen Wert, der von f in einem kritischen Punkt vom Index k angenommen wird, während f_B keine kritischen Werte annimmt, so unterscheiden sich die Bettischen Zahlen dieser Niveauflächen in genau zwei der der Dimensionen $k - 1$, k und $n - k - 1$, $n - k$. Die Differenzen entsprechender Bettischen Zahlen in diesen Dimensionen werden genauer angegeben; sie sind 1 oder -1 und im Falle $n = 2k - 1$, $2k$, $2k - 1$ unter Umständen 0, 2 oder -2. Der angeführte Satz von Morse erweist sich auch unter allgemeineren Randbedingungen als gültig. *Wolfgang Franz* (Gießen).

Whitehead, J. H. C.: On the asphericity of regions in a 3-sphere. Fundam. Math. **32**, 149—166 (1939).

Eilenberg hat die Frage gestellt (vgl. dies. Zbl. **16**, 138), für welche Knoten k in der 3-Sphäre S^3 der Restraum $S^3 - k$ asphärisch ist; asphärisch heißen die von Hurewicz untersuchten Räume (dies. Zbl. **13**, 283), in denen jedes stetige Bild der n-Sphäre, $n > 1$, auf einen Punkt zusammenziehbar ist. In dieser Arbeit werden die Reidemeisterschen Homotopiekettenringe zur Untersuchung dieser Frage herangezogen. Es ergibt sich ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß der Raum $S^3 - k$ und allgemeinere Räume asphärisch sind, und zwar in Form eines Gleichungssystems im Homotopiekettenring. An Beispielen spezieller Knoten und Verkettungen wird das Erfülltsein des Kriteriums nachgerechnet. Ein weiterer Satz gibt eine Bedingung, nach welcher man einen Summenraum $P_1 + P_2$ als asphärisch erkennen kann. Endlich wird ein Analogon zum Dehnschen Lemma bewiesen, welches unter dessen Voraussetzungen und wenn $S^3 - k$ asphärisch ist, die Zyklizität der Gruppe von $S^3 - k$ behauptet. *Wolfgang Franz* (Gießen).

Eilenberg, Samuel: On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups. Fundam. Math. **32**, 167—175 (1939).

$\mathfrak{Y}$ bezeichne einen separabeln, zusammenhängenden, metrischen und in den Dimensionen 0 bis n lokal zusammenhängenden Raum; $\mathfrak{Y}^{S_n}$ sei der Raum der Abbildungen $f(x) = y$ der n-dimensionalen Sphäre S^n in den Raum $\mathfrak{Y}$; $\mathfrak{Y}_0^{S_n}$ sei der Teilraum von $\mathfrak{Y}^{S_n}$, für welchen $f(x_0) = y_0$ gilt, dessen Funktionen also einen festen Punkt x_0 in einen festen Punkt y_0 abbilden. $\mathfrak{Y}$ heißt einfach in der Dimension n, wenn jede Komponente von $\mathfrak{Y}^{S_n}$ genau eine Komponente von $\mathfrak{Y}_0^{S_n}$ enthält. Notwendig und hinreichend hierfür ist, daß die in der n-ten Homologiegruppe $\pi_n(\mathfrak{Y})$ durch die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathfrak{Y})$ induzierten Automorphismen sämtlich die Identität sind. Mannigfaltigkeiten, deren universelle Überlagerung eine Sphäre S^n ist, sind dann und nur dann einfach von der Dimension n, wenn sie orientierbar sind. *K. Reidemeister.*

Mayer, Walther: Charaktersysteme und Dualitätstheoreme. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **18**, 1—27 (1939).

Für Paare $\mathfrak{A}$, K von abelschen Gruppen wird die Gruppe $\mathfrak{A}^K$ der Charaktere von $\mathfrak{A}$ in K betrachtet, im Falle topologischer Gruppen $\mathfrak{A}$, K die der stetigen Charaktere. Für Systeme Σ von n Gruppen mit einem Randoperator werden die Eigenschaften des Charaktersystems Σ^K untersucht, insbesondere die Dualitätseigenschaften. Es wird festgestellt, unter welchen Bedingungen die für den Spezialfall der Gruppe $K = K_1$ der reellen Zahlen mod 1 bekannten Gesetzmäßigkeiten erhalten bleiben. Die Ergebnisse werden zur Ableitung des Poincaréschen und des Alexanderschen Dualitätssatzes in der von Pontrjagin gegebenen Fassung und von gruppentheoretischen Verallgemeinerungen dieser Sätze angewandt. Auch allgemeine Koeffizientengruppen und Systeme Σ mit abzählbarer Basis werden berücksichtigt. *Wolfgang Franz* (Gießen).

Kline, Morris: Note on homology theory for locally bicompact spaces. Fundam. Math. **32**, 64—68 (1939).

Die von A. Kolmogoroff in C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1144, 1325, 1558 (1936), s. dies. Zbl. **13**, 422, 423, definierten Homologiegruppen zweiter Art und die von I. W. Alexander in Ann. of Math. **37** (1936), s. dies. Zbl. **15**, 129, definierten Homologiegruppen sind in lokal bikompakten Räumen isomorph. *K. Reidemeister.*

Heegaard, Poul: Die Topologie und die Theorie der algebraischen Funktionen mit zwei komplexen Variabeln. (*Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.*) 9. Congr. des Math. scand. 15—22 (1939).

Eine algebraische Fläche $f(x, y, z) = 0$ kann als n-blättriger Überlagerungsraum der komplexen (x, y)-Ebene aufgefaßt werden. Zur Veranschaulichung dieser vierdimensionalen „Ebene" wird eine kotierte Projektion angewandt, indem der Punkt $(x = x_1 + ix_2,\ y = y_1 + iy_2)$ durch einen Raumpunkt (x_1, x_2, y_1) mit der Kote y_2 dargestellt wird. Am Beispiel der Fläche $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ wird nun vorgeführt, wie man den fraglichen Überlagerungsraum, nachdem man aus ihr zwei Punkte samt Umgebungen entfernt hat, in eine einfache Gestalt, analog dem bekannten Heegaarddiagramm für Riemannsche Flächen, deformieren kann. *van der Waerden.*

Feldbau, Jacques: Sur la classification des espaces fibrés. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1621—1623 (1939).

In Verallgemeinerung der von Seifert eingeführten 3-dimensionalen gefaserten Räume (dies. Zbl. **6**, 83) werden allgemeinere Faserungen behandelt: Durch jeden Punkt einer p-dimensionalen Mannigfaltigkeit möge eine und nur eine r-dimensionale Mannigfaltigkeit, eine Faser, gehen, welche zu einer festen Mannigfaltigkeit F homöomorph ist. Zu jeder Faser gebe es Umgebungen aus Fasern, welche homöomorph dem topologischen Produkt von F mit einer $(p-r)$-dimensionalen Vollkugel sind. Die Fasern bilden demnach einen Raum Q von $p-r$ Dimensionen, den Basisraum (Zerlegungsraum). Die einfachste Mannigfaltigkeit mit der Faser F und der Basis Q erhält man in dem topologischen Produkt $F \times Q$. Es wird ein Verfahren angegeben, wie man bei gegebener Simplizialteilung von Q alle zu F und Q gehörigen gefaserten Räume mit Hilfe der homöomorphen Abbildungen von F auf sich überblicken kann. Zwei Theoreme behandeln, ohne Beweis, die Sonderfälle, daß Q eine Vollkugel oder eine Sphäre ist. Im ersten Falle ergibt sich nur das topologische Produkt $F \times Q$; der der zweite Fall führt auf die Darstellungen der $(p-r-1)$-dimensionalen Sphäre in der Automorphismengruppe von F und enthält speziell die von Whitney (dies. Zbl. **18**, 239) betrachteten Sphärenräume. *Wolfgang Franz* (Gießen).

Klassische theoretische Physik.

Analytische Mechanik:

Schieldrop, Edgar B.: L'accélération de Coriolis généralisée et l'accélération de déviation non holonome. (*Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.*) 9. Congr. des Math. scand. 98—100 (1939).

On soit que dans le mouvement d'un système matériel, l'accéleration absolue peut être décomposée dans trois termes, l'accélération d'entraînement, relative et de Coriolis. Une décomposition analogue est posssible si l'on separe les n paramètres du

système dans deux catégories, par exemple $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ d'un part et q_n d'autre part. Dans ce cas l'accélération de Coriolis apparait comme la somme de deux termes, qui sont égaux si le système est holonome. Dans le cas d'un système non holonome, la différence de ces deux termes est appellée l'accélération de deviation non holonome. *G. Vranceanu* (Cernauţi).

Košt'ál, Rostislav: Sur les conditions de la stabilisation des oscil ations par couplage. Čas. mat. fys. **68,** 50—56 u. franz. Zusammenfassung 56—58 (1939) [Tschechisch].

Un système mécanique à n degrés de liberté étant donné il y a deux espèces de termes dans les équations des petits mouvements: les uns correspondent aux mouvements de différentes parties du système sous l'hypothèse que chaque partie se meut sans subire des influences de part des autres parties; les autres expriment l'effet du couplage entre les différentes parties du système. L'auteur étudie les conditions nécéssaires et suffisantes pour que des oscillations stables soient possibles. Il exprime ces conditions au moyen des expressions formés à l'aide des coefficients de l'équation caractéristique. *B. Hostinský* (Brünn).

Graffi, Dario: Ancora sui limiti superiori della frequenza e lo smorzamento dei sistemi oscillanti dissipativi. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **1,** 199—201 (1939).

Vgl. dies. Zbl. **18,** 279. Die dort erwähnte obere Grenze kann auf die Hälfte herabgedrückt werden. *Ullrich* (Gießen).

Sikorski, G. S.: Sur la figure d'équilibre du fil d'égale résistance. Appl. Math. a. Mech., N. s. **1,** 447—476 u. franz. Zusammenfassung 476—478 (1938) [Russisch].

Über die Gleichgewichtsfigur eines Fadens gleicher Widerstandskraft unter dem Einfluß eines beliebigen Kräftesystems. Nach Aufstellung der allgemeinen Gleichungen werden insbesondere der Fall einer Zentralkraft und der Fall von Parallelkräften eingehend besprochen. *Funk* (Prag).

Rakowiecki, T.: Détermination de l'orbite du compagnon de l'étoile double visuelle à l'aide des temps et des angles de position. Prace mat.-fiz. **46,** 245—270 (1939).

Verf. gibt eine einfache Bahnbestimmungsmethode für Doppelsterne an, die unter Benutzung von ausgewählten Positionsmessungen und bekannter Periode das notwendige Gleichungssystem vereinfacht. Im ersten Teil der Abhandlung bestimmt er die Exzentrizität e und die Epoche T, im zweiten die Elemente ω, i, Ω, die die Bahnlage bestimmen. An einem numerischen Beispiel wird die Bahnbestimmung von ξ Ursae majoris erläutert und die erzielten Resultate mit den Bahnelementen von Nörlund und van den Bos verglichen. *Slouka* (Prag).

Chazy, Jean: Sur l'action d'un anneau circulaire sur le périhélie et le nœud d'une planète. C. R. Acad. Sci., Paris **208,** 1375—1379 (1939).

Anknüpfend an Untersuchungen von P. Fatou (vgl. dies. Zbl. **4,** 332) bestimmt der Verf. die Bewegung eines Massenpunktes in einem rotationssymmetrischen Gravitationsfeld (Kreisring mit Zentralkörper). Insbesonders wird die Perihelbewegung in der Nachbarschaft einer stabilen Kreisbahn behandelt. *A. Klose* (Berlin).

Baiew, K.: On the motion of perijove of the fifth sattelite of Jupiter. Astron. J. Soviet Union **15,** 384—388 u. engl. Zusammenfassung 388 (1938) [Russisch].

Für die Berechnung der Bewegung des Perijoviums des fünften Jupitermondes werden neue Formeln entwickelt, wobei die Differentialgleichungen für die Länge des Perijoviums und für die Exzentrizität benützt werden. Verf. vernachlässigt aber dabei die Neigung der Bahn zur Äquatorebene Jupiters und die Größen zweiter Ordnung in der Störungsfunktion. Die resultierenden Formeln werden mit den unlängst entwickelten Formeln desselben Problems von Michalsky [Astron. J. Soviet Union **7,** 172 (1930)] verglichen, und es zeigt sich, daß beide Gleichungssysteme nur durch den Wert der Konstanten sich unterscheiden. Da die ursprünglichen Konstanten der Theorie nur mit geringer Genauigkeit bekannt sind, kann man die entwickelten Formeln nur für eine Zeitspanne von wenigen Jahren benützen. *Slouka* (Prag).

Fabre, Hervé: Les lacunes de l'anneau des astéroïdes considérées comme des phénomènes de résonance. C R. Acad. Sci., Paris **208,** 730—732 (1939).

Sokoloff, George: Sur les points singuliers des intégrales du problème rectiligne des trois corps qui s'attirent proportionnellement à l'inverse d'une puissance quelconque

de la distance. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr **1,** 3—14 u. franz. Zusammenfassung 15—16 (1938) [Ukrainisch].

Für das Dreikörperproblem mit Anziehung nach einem Potenzgesetz wird das Verhalten der Lösungen bei einem Zusammenstoß untersucht. Hilfsmittel bilden Reihenentwicklungen nach passend gewählten Veränderlichen. *Theodor Zech.*

Reisch, Paul: Periodische Lösungen des ebenen Dreikörperproblems in der Nähe der Lagrangeschen Dreieckslösung. Math. Z. **45,** 289—311 (1939).

Die von H. E. Buchanan [Amer. J. Math. **50,** 613 (1928) und **51,** 595 (1929)] aufgefundenen Schemata von periodischen Bahnen des Dreikörperproblems in der Nähe der Lagrangeschen Dreieckslösungen werden hier fest begründet. Die Methode, die ganz im Reellen verläuft, besteht in der Lösung der Variationsgleichungen und Diskussion der Periodizitätsbedingungen. *van Kampen* (Baltimore).

Belorizky, David: Chocs triples imaginaires dans le problème plan des trois corps. C. R. Acad. Sci., Paris **208,** 558—560 (1939).

Das Verhalten von vier relativen Koordinaten als analytische Funktionen der komplexen Zeitvariablen wird untersucht in der Nähe eines imaginären dreifachen Stoßes, der durch das gleichzeitige Verschwinden der Entfernungen der Körper charakterisiert ist und für die Konvergenzgrenze der Reihenentwicklungen von Bedeutung werden könnte. *E. Hölder* (Leipzig).

Belorizky, David: Les chocs dans le problème des trois corps et dans l'espace. C. R. Acad. Sci., Paris **208,** 966—969 (1939).

Im „problème restreint" sowie im „problème général" des Dreikörperproblems untersucht der Verf. das Verhalten von Integrallösungen in der Nähe singulärer Stoßpunkte, und zwar im reellen und imaginären Gebiet. Im ersten Fall zeigt sich, daß alle Stoßpunkte kritische algebraische Punkte sind und nur die binären imaginären Stoßpunkte Integrallösungen zulassen, welche von derselben Anzahl von willkürlichen Konstanten abhängen wie die allgemeine Integrallösung. Im zweiten Fall (mit Ausnahme der binären imaginären Stoßpunkte) sind die Integrale von zehn Konstanten abhängig. Die einzigen Stoßpunkte, welche keine kritischen algebraischen Punkte vorstellen, sind dreifache imaginäre Stoßpunkte. *Slouka* (Prag).

García, Godofredo: Balistique. — Le problème principal de la balistique extérieure. I. Rev. Ci., Lima **40,** 529—535 (1938).

García, Godofredo: Balistique. — Le problème principal de la balistique extérieure. II. Rev. Ci., Lima **40,** 537—539 (1938).

Genäherte Lösung der in schiefwinkligen ebenen Koordinaten angeschriebenen Vektorgleichungen der äußeren Ballistik nach der Picardschen Methode in erster Näherung. *Collatz.*

Garcia, Godofredo: Le problème secondaire de la balistique extérieure. C. R. Acad. Sci., Paris **208,** 1707—1709 (1939).

Berechnung des Einflusses der Erdrotation auf die Geschoßbahn nach der Picardschen Methode in erster Näherung. *Collatz* (Karlsruhe).

De Simoni, Franco: Sull'integrazione del moto di un solido intorno ad un punto fisso col metodo di Hamilton-Jacobi. Boll. Un. Mat. Ital., II. s. **1,** 122—128 (1939).

Es handelt sich um eine einfache Anwendung der Integrationsmethode von Hamilton-Jacobi auf das Problem der Bewegung eines Körpers um einen Festpunkt, wobei die bekannten Resultate von Lagrange, Poisson, Poinsot und Kowalewski wiedererhalten werden. *Carlo Tolotti.*

Elastizität, Akustik:

Biot, M. A.: Non-linear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress. Philos. Mag., VII. s. **27,** 468—489 (1939).

Symmetric strain components ε_{rs} are linearly related to the actual changes of length in the material and are expressed in terms of the familiar quantities e_{yz}, ω_x, by the equations

$$\varepsilon_{23} = e_{yz} + \tfrac{1}{2}\,\omega_x(e_{zz} - e_{yy}) + \tfrac{1}{2}\,\omega_y e_{xy} - \tfrac{1}{2}\,\omega_z e_{zx} - \tfrac{1}{2}\,\omega_y\omega_z\,,$$

$$\varepsilon_{11} = e_{xx} + e_{xy}\omega_z - e_{zx}\omega_y + \tfrac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2),$$

and similar equations in the important case when the quantities e_{yz}, ω_x can be regarded as small quantities of the first order and only first and second-order terms are to be retained. In this case the stress components σ_{yz} are also regarded as small quantities of the first order and when terms of higher order than the second are neglected these components can be expressed in the forms

$$\sigma_{xx} = \sigma_{11} + 2\sigma_{31}\omega_y - 2\sigma_{12}\omega_z,$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{23} + (\sigma_{23} - \sigma_{33})\omega_x - \sigma_{12}\omega_y + \sigma_{13}\omega_z,$$

where the quantities σ_{rs} are stress components relative to axes (1, 2, 3) obtained from the axes (x, y, z) by a rotation specified by the vector with components $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. — The equations of equilibrium are expressed in terms of the quantities ω_x, e_{yz}, σ_{rs} and the derivatives of the quantities ω_x, σ_{rs}. An expression is also found for the increment of the strain energy $\delta W = \sum \tau_{\mu\nu}\delta\varepsilon_{\mu\nu}$ where

$$\tau_{11} = (1+\varepsilon)\sigma_{11} - \sigma_{11}\varepsilon_{11} - \sigma_{12}\varepsilon_{12} - \sigma_{31}\varepsilon_{31},$$

$$\tau_{23} = (1+\varepsilon)\sigma_{23} - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\sigma_{23} - \tfrac{1}{2}(\sigma_{22}+\sigma_{33})\varepsilon_{23} - \tfrac{1}{2}(\sigma_{12}\varepsilon_{31}+\sigma_{31}\varepsilon_{12}).$$

The tensors τ_{rs}, σ_{rs} are supposed to specify stress per unit (initial, actual) area (before, after) deformation of the material. The stress-strain relations are to be chosen so as to satisfy the 15 conditions $\frac{\partial \tau_{rs}}{\partial \varepsilon_{ik}} = \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial \varepsilon_{rs}}$. Equilibrium conditions are expressed by means of the stresses, and boundary conditions are formulated. — The analysis is used to give a theory of elasticity for small deformations in a material under initial stress. The special case of large rotations and small strains is also considered. *H. Bateman.*

Bosson, Geoffrey: The flexure of an infinite elastic strip on an elastic foundation. Philos. Mag., VII. s. 27, 37—50 (1939).

Die in einer Arbeit von R. Thornton Coe [Philos. Mag., VII. s. 25, 49—65 (1938)] gegebenen elementaren Entwicklungen über die Biegung eines Balkens auf einer elastischen Bettung werden durch eine exaktere Theorie in zweidimensionaler Auffassung weitergeführt. Die Belastung des Streifens wird als reine Normalbelastung (Einzellasten oder verteilte Lasten), die Bettung von endlicher Tiefe und die Grenzfläche zwischen dem Streifen und der Bettung als glatt vorausgesetzt. Die verwendete Methode ist die von A. E. H. Love als verallgemeinerte ebene Spannung bezeichnete, für die Lösung wird die von W. M. Shepherd [J. London Math. Soc. 4, Tl. 3, 213 bis 219 (1931)] angegebene symbolische Form herangezogen. Der Balken wird von unendlicher Länge angenommen, wodurch an Stelle der sonst auftretenden Fourierschen Reihen Fouriersche Integrale treten. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Ǒkubo, H.: The stress distribution in an aelotropic circular disk. Philos. Mag., VII. s. 27, 508—512 (1939).

Der Verf. betrachtet ein zweidimensionales Medium, bei dem die von K. Wolf, Z. angew. Math. Mech. 15 (1935) entwickelten Gleichungen für das Hookesche Gesetz gültig sind. Wenn die beiden Elastizitätsmoduln nicht allzusehr verschieden sind, können Lösungen für das aeolotropische Medium aus Lösungen für das isotrope Medium durch eine affine Transformation gewonnen werden. Insbesondere wird der Fall, wo eine aeolotropische Kreisscheibe an zwei diametral entgegengesetzten Stellen von zwei entgegengesetzt in der Hauptrichtung wirkenden Kräften beansprucht wird, auf einen analogen Fall für das isotrope Medium bei elliptischer Grenze zurückgeführt. *Funk.*

Goodier, J. N.: On the problems of the beam and the plate in the theory of elasticity. Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 32, 65—88 (1938).

Verf. untersucht die Spannungsverteilung in einem Balken mit quadratischem Querschnitt, dessen Kantenlänge a im Verhältnis zur Höhe c klein ist $\left(\frac{a}{c} = \varepsilon\right)$, bei verschiedenen Belastungszuständen, indem er die Spannungskomponenten $\widehat{xx}$, $\widehat{xy}$, . . .

nach Potenzen von ε entwickelt und für die einzelnen Koeffizienten dieser Entwicklung Differentialgleichungen herleitet, die sich aus den bekannten Differentialgleichungen für die Spannungskomponenten durch den Vergleich gleich hoher Potenzen von ε ergeben. Diese Methode wendet Verf. auch an beim Problem der dünnen quadratischen Platte mit der Kantenlänge b und der Dicke $2h$, wobei h gegen b sehr klein ist $\left(\frac{h}{b} = \varepsilon\right.$ gesetzt). Dadurch gelangt er zu interessanten Resultaten, von denen nur folgende genannt seien: Bei gleichmäßig über die Länge des Balkens verteilter Last ist die Krümmung der Biegungslinien bis auf 2. Potenzen von ε durch den Bernoullischen Ausdruck $\frac{M}{E \cdot J}$ gegeben, und bei Druckbelastung der dünnen Platte wird die Beziehung zwischen den Krümmungen und den Biegemomenten modulo ε^2 durch die Poisson-Kirchhoffsche Theorie geliefert. *Wegner* (Heidelberg).

Reissner, Eric: Remark on the theory of bending of plates of variable thickness. III. J. Indian Math. Soc., N. s. **3**, 200—201 (1939).

Wigglesworth, L. A.: The flexure and torsion of an internally cracked shaft. Proc. roy. Soc., Lond. A **170**, 365—391 (1939).

A region S in the $z = x + iy$-plane is bounded internally by the closed curve C_1 and externally by the closed curve C_2 which completely surrounds C_1. Conjugate functions Φ and Ψ regular in S and such that Ψ has the cyclic constant q are to be found when the boundary values of Ψ are known. If $z = f(w)$, $w = u + iv$, is the relation mapping S on the interior of a rectangle with sides 2ω, ω', so are Φ, Ψ to be regarded as functions of u, v with $\Psi(u + 2\omega, v) = \Psi(u, v) - q$; in $\Phi + i\Psi = G(w) + iqw/2\omega$ it is found that

$$G(w) = \alpha + i\beta + \int_0^{2\omega} [g(u', 0)\, S(u' - w) - g(u', \omega')\, S(u' + i\omega' - w)]\, du'$$

where α and β are constants, $\pi g(u, v)$ is the boundary value of the imaginary part G and $S(w) = \zeta(\omega) - \eta w/2\omega$ where $\zeta(\omega)$ is the zeta function of Weierstrass associated with the periods 2ω, $2i\omega'$ and $\eta = \zeta(\omega)$. — A solution is then given of the problem of the flexure and torsion of a shaft whose cross-section is a circle with an interior slit, the slit being a segment of a diameter, not necessarily in the central position. The torsional rigidity, the position of the centre of flexure and the associated twist in the case of flexure are all found in finite terms with the aid of elliptic functions.

H. Bateman (Pasadena).

Wigglesworth, L. A., and A. C. Stevenson: Flexure and torsion of cylinders with cross-sections bounded by orthogonal circular arcs. Proc. roy. Soc., Lond. A **170**, 391—414 (1939).

The equations of the bounding circular arcs are taken to be $|z| = a$, $|z - a \sec\alpha| = a \tan\alpha$. The transformation $z(t - e^{-i\alpha}) = a(t e^{-i\alpha} - 1)$ is then used to map the interior of the cross-section upon the positive quadrant in the t-plane which in turn is mapped by the transformation $\zeta(i + t^2) = i - t^2$ upon the interior of the circle $|\zeta| = 1$, and by the transformation $t = ie^{-\omega}$ upon the infinite strip $0 \leq v \leq \frac{1}{2}\pi$ in the plane of the complex variable $\omega = u + iv$. If $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ we have the relations $z \operatorname{ch}\frac{1}{2}(\omega + i\beta) = ia \operatorname{sh}\frac{1}{2}(\omega - i\beta)$, $\zeta = \tanh 2\omega - i \operatorname{sech} 2\omega$. — A convenient form of the Poisson integral is found to be $\Phi + i\Psi = \alpha_0' - \frac{1}{\pi}\int_c \Psi_0 \coth(\omega - \omega')\, d\omega'$ where α_0' is a complex constant which can be taken to be zero in elastic problems. — Stevenson's canonical flexure functions Ω_r, ω_r $(r = 1, 2, 3)$ are now written in the forms $\Omega_{r0} + \Omega_{r1}$, $\omega_{r0} + \omega_{r1}$ respectively where the first terms refer to the complete circular cylinder. It is found in particular that

$$2\pi\omega_{31} = -a^2 i \cot\beta \int_{-\infty}^{\infty} \coth(\omega - u')\,[\tanh\tfrac{1}{2}(u' + i\beta') - \tanh\tfrac{1}{2}(u' - i\beta')]\, du'$$

and that ω_{11}, Ω_{21}, ω_{21} and Ω_{11} can be expressed in terms of ω_3, and its derivatives with respect to β and ω. The quantity Ω_{31} can be expressed in terms of ω_{31} and a quantity ω_4 which is given by the equation

$$2\pi\omega_4 = -a^2 i \int_{-\infty}^{\infty} \coth(\omega - u') [\operatorname{cosech}(u' + i\beta') - \operatorname{cosech}(u' - i\beta')] du'$$

these two integrals are expressed in finite terms and $\int \omega_4 dw$ is also found but $\int \alpha_{31} dw$ is left in the integral form. A comparison is made with Gronwall's solution and the advantage of using the w-plane is apparent. — A study of the moment integrals is made with the aid of the power series for $\beta \operatorname{cosec} \beta$ and quantities are tabulated both for the notched and lenticular cylinder. The centres of flexure and least strain are located and the results are shown graphically. *H. Bateman* (Pasadena).

Seth, B. R.: An application of the theory of finite strain. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **9**, 17—19 (1939).

Schwingungen eines Massenpunktes, der an einem elastischen Faden aufgehängt ist, wobei die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung gegeben ist durch die Formel $2T = E(1 - (1 + S)^{-2})$. Dabei bedeuten E den Youngschen Modul und S das Verhältnis von Längenzuwachs zur Länge im ungedehnten Zustand. *Funk* (Prag).

Ruedy, R.: Vibrations on power lines in a steady wind. V. Resonance of strings with strenghthened ends. Canad. J. Res. **16**, Sect. A, 215—225 (1939).

Verf. untersucht die Resonanzfrequenz bei erzwungenen gedämpften und ungedämpften Schwingungen eines Seiles mit festen Enden, das mit einer Masse nach dem Gesetz $\varrho_0(1 \pm \lambda x/L)^m$ pro Längeneinheit belegt ist. Er vergleicht diese Resonanzfrequenz mit der eines Seiles, das mit einer dem obigen Gesetz entsprechenden äquivalenten konstanten Massenbelegung versehen ist. *Wegner* (Heidelberg).

Konstantinov, B.: On the absorption of sound-waves upon reflection from a solid boundary. J. techn. Physics, Leningrad **9**, 226—238 (1939) [Russisch].

Akhiezer, A.: On the absorption of sound in solids. Ž. eksper. teoret. Fis. **8**, 1318—1329 (1938) [Russisch].

Akhiezer, A.: On the absorption of sound in metals. Ž. eksper. teoret. Fis. **8**, 1330—1339 (1938) [Russisch].

Richards, William T.: Supersonic phenomena. Rev. Modern Physics **11**, 36—64 (1939).

Verf. berichtet über neuere Ergebnisse der Ultraschallforschung. In einem ersten Teil werden die bekannten Ausdrücke der Schallausbreitungsgeschwindigkeit ebener Schallwellen als Funktion der Amplitude, der Dichte, Temperatur und Schallfrequenz abgeleitet. Ein weiterer Teil der Arbeit bespricht die verschiedenen bekannten Methoden zur Messung der Schallgeschwindigkeit und Schallabsorption. Ein dritter Abschnitt behandelt die Wirkungen sehr intensiver Schallwellen. (Es ist auffallend, daß in der umfassenden Bibliographie die schönen Ultraschallarbeiten von Cl. Schaefer und L. Bergmann nicht erwähnt worden sind. Zus. d. Ref.) *Falkenhagen* (Dresden).

Alleman, R. S.: Dissipative acoustic reflection coefficients in gases by ultrasonic interferometry. Phys. Rev., II. s. **55**, 87—93 (1939).

Der Reflexionskoeffizient für Ultraschallwellen in Gasen an festen Körpern wurde viel kleiner gefunden als nach der dynamischen Theorie des Schalles zu erwarten, und außerdem frequenzabhängig. Beides wurde durch eine von Herzfeld entwickelte Theorie [Phys. Rev. **53**, 899 (1938)] erklärt, die die Wärmeleitung im reflektierenden Material berücksichtigt. In der vorliegenden Arbeit wird diese Theorie auf das akustische Interferometer angewandt derart, daß auch die Verluste bei der Emission und Reflexion an der Schallquelle (Quarzplatte) berücksichtigt werden. Ein von Hubbard [Phys. Rev. **38**, 1011 (1931); **41**, 523 (1933); **46**, 525 (1934)] entwickeltes Verfahren gestattet, die im akustischen Interferometer auftretenden Verluste an akustischer Energie getrennt von denen, die auf Schallabsorption im Gas beruhen, zu messen. Die niedrigsten so gemessenen Werte stimmen gut mit den theoretischen überein; alle anderen lassen

sich, wie durch besondere Versuche bewiesen wird, im wesentlichen auf unvollkommene Parallelität zwischen Quarzplatte und Reflektor zurückführen. Außerdem muß darauf geachtet werden, daß die Schallquelle möglichst wie eine Kolbenmembran arbeitet. Die bisherigen interferometrischen Schallgeschwindigkeitsmessungen werden durch diese Überlegungen nicht berührt. *H. O. Kneser* (Marburg a. d. L.).

Matossi, F.: Über die Dispersion des Ultraschalls in Flüssigkeiten. Physik. Z. **40**, 294—297 (1939).

Mit Hilfe von Debye-Sears-Interferenzen wird die Schallgeschwindigkeit in Xylol (V_x) und Wasser (V_w) verglichen. Bei sorgfältig konstant gehaltenen Versuchsbedingungen und hinreichend kleiner Schallintensität stimmt V_w/V_x bei 3 und 18 MHz innerhalb der Versuchsfehler überein. Da es sehr unwahrscheinlich ist, daß beide Flüssigkeiten die gleiche Dispersion zeigen, ist dadurch erwiesen, daß keine von ihnen im Frequenzgebiet um 10^7 Hz Dispersion von mehr als 0,3‰ besitzt, was auch nach den Ergebnissen früherer Absorptionsmessungen zu erwarten war. Gegenteilige Befunde von Dutta [Physik. Z. **39**, 186 (1938)] dürften auf zu große Schallintensität und dadurch bedingte geringfügige Temperaturerhöhung in der Flüssigkeit zurückzuführen sein. *Kneser* (Marburg).

Wierzejewski, H.: Elastische Eigenschwingungen von Kristallen bei gemischten Randbedingungen. Z. Kristallogr. A **101**, 94—116 (1939).

Über die elastischen Eigenschwingungen dreidimensional ausgedehnter Festkörper ist wenig bekannt. Die Schaefer-Bergmannschen Beugungsaufnahmen an schwingenden Kristallen und Gläsern zeigen und die Theorie läßt erwarten, daß jedenfalls die höheren Eigenschwingungen nahezu als einfache Überlagerung endlich vieler ebener Wellen des unbegrenzten elastischen Mediums aufgefaßt werden dürfen. Die Frage entsteht, ob und für welche Eigenschwingungssysteme dies streng gilt. Ortvay hat früher [Ann. Physik (4) **42**, 745 (1913)] solche Systeme angegeben. Wierzejewski stellt sich in der vorliegenden Arbeit die Aufgabe, sämtliche Eigenschwingungssysteme des angegebenen Typs für alle Kristallsymmetrien aufzuzählen. Er zeigt, daß die Begrenzung des schwingenden Körpers aus Symmetrieebenen des Materials bestehen muß und daß auf ihr „gemischte" Randbedingungen vorgeschrieben sein müssen. Die praktisch wichtige Randbedingung der Kräftefreiheit liefert unter allen Umständen kompliziertere Schwingungsformen! Die von ihm aufgestellten Eigenschwingungssysteme sind „vollständig" (d. h. können einen willkürlich gegebenen Anfangszustand fortsetzen) nur innerhalb bestimmter Grundbereiche, die für jede Symmetrieklasse einzeln angegeben werden. *Fues.*

Hydrodynamik:

Maruhn, Karl: Über ein Existenzproblem der Hydrodynamik. Math. Z. 45, 155—175 (1939).

Verf. beweist für ein gewisses Zeitintervall die Existenz von sog. achsensymmetrischen Flüssigkeitsbewegungen in der Nachbarschaft einer bekannten ebenen Bewegung. Letztere genügt (als Bewegung im dreidimensionalen Raum aufgefaßt) nicht den Bedingungen im Unendlichfernen, unter denen ein entsprechender Lichtensteinscher Satz von einer dreidimensionalen Bewegung zu Nachbarbewegungen überzugehen gestattet. Vielmehr muß der Verf. die von Lichtenstein stammenden potentialtheoretischen Hilfsmittel für seine Zwecke weiter ausgestalten. Als Anwendungsbeispiel ergibt sich (aus der Rotation zweier Wirbelzylinder umeinander) die qualitativ von Helmholtz geschilderte Bewegung zweier Wirbelringe, die sich abwechselnd erweitern und verengen, wobei der kleinere durch den größeren hindurchkriecht. Das kann also eine Zeitlang mathematisch verfolgt werden, noch nicht aber vermochte der Verf. eine periodische Bewegung zweier Wirbelringe nachzuweisen. *E. Hölder* (Leipzig).

Rubinstein, J.: Determination of the type of solution of certain problems of hydrodynamics and heat transfer by transformation of variables in differential equations. J. techn. Physics, Leningrad **9**, 470—482 (1939) [Russisch].

Si nous transformons les variables indépendantes et les fonctions inconnues dans les équations hydrodynamiques ou celles de la chaleur d'une manière convenable, les équations

transformées sont plus simples; elles contiennent en général un nombre plus petit d'inconnues et l'on peut dans certains cas, au moyen de ces transformations, éliminer des paramètres qui entrent dans les équations primitives. L'auteur considère surtout les équations hydrodynamiques dans le cas d'un mouvement stationnaire d'un fluide visqueux et incompressible où l'on tient compte d'une distribution de température non uniforme. Il introduit, au lieu d'une coordonnée, x par exemple, une quantité de la forme $x_1 = x/l$ où l est une longueur; il introduit au lieu de la température t une expression linéaire et homogène de degré zéro par rapport à t et à certaines températures constantes. Les fonctions inconnues (pression, composantes de la vitesse, paramètres divers) sont alors exprimées à l'aide des formules où entrent des variables (telles que x_1) sans dimensions. L'auteur applique cette méthode pour résoudre des problèmes relatifs à l'écoulement de l'eau dans un canal ainsi que d'autres questions d hydrodynamique.

B. Hostinský (Brünn).

Gukhman, A.: On the theory of boundary conditions in a moving gas. J. techn. Physics, Leningrad **9**, 411—423 (1939) [Russisch].

Pistolesi, E.: Sul moto non permanente di un solido in un fluido indefinito incompressibile. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **27**, 661—668 (1938).

A calculation is first made of the rate of change of momentum in the space τ between the body and a sphere of large radius. In the case when the flow is of Eulerian type the resulting equation may be combined with the equation $p + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho\frac{\partial\Phi}{\partial t} = f(t)$ to obtain an expression

$$F = -\varrho(d/dt)\int_\sigma \Phi n\, d\sigma$$

for the resultant of the forces exerted by the fluid pressure on the body. A corresponding expression is found for the moment of these forces. The case of a surface of discontinuity is then considered and when there is a circulation round the body, as in two-dimensional flow, the possibility of a shedding of eddies from the body is taken into consideration. By dividing the potential Φ into two parts one of which corresponds to the Eulerian flow and the other to a flow with circulation the author defines the centre of a profile in a manner independent of its conformal representation on a circle.

H. Bateman (Pasadena).

Faxén, O. H.: Hydrodynamical resistance formulae. (*Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.*) 9. Congr. des Math. scand. 165—170 (1939).

Es wird für einen zwischen zwei parallelen Wänden befindlichen Zylinder der Widerstand berechnet unter der Voraussetzung konstanter Anströmungsgeschwindigkeit bei ruhendem Zylinder (Durchmesser $2a$) und ruhenden Gefäßwänden (Abstand $2l$) (Stokes Paradoxon). Zur mathematischen Behandlung wird eine Stromfunktion ψ $\left(u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ eingeführt und zunächst gezeigt, daß für Ansätze wie $e^{\pm ay}\cos ax$, $ye^{\pm ay}\sin ax$ das Problem nicht gelöst werden kann. Die Integration von ψ gelingt durch Einführen von vier Funktionen, die sich aus den Randbedingungen $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$ für $y = \pm l$ bestimmen lassen. Als Widerstand pro Längeneinheit des Zylinders wird gefunden: $\frac{4\pi\mu u_0}{\ln\frac{l}{a} - 0{,}9157\cdots + \frac{a^2}{l^2}\cdot 1{,}72\cdots - \frac{a^4}{l^4}\cdot 1{,}73\cdots}$. In dieser Formel erhält man eine Verallgemeinerung der Lambschen Formel, die, abgeleitet mit Hilfe der Oseenschen Methode, nur für große l Gültigkeit besitzt.

E. Estel (Leipzig).

Goldstein, S.: A note on the boundary layer equations. Proc. Cambridge Philos. Soc. **35**, 338—340 (1939).

Es wird gezeigt, daß die Grenzschichtgleichungen

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

nur für den Ansatz $U = c\cdot e^{\alpha x}$ $(\alpha > 0)$ bzw. $U = c\cdot x^m$ (Falkner und Skan, vgl. dies. Zbl. 3, 174) eine Lösung ergeben, in der für verschiedene x-Werte die Geschwindigkeitsverteilungen ähnlich sind.

E. Estel (Leipzig).

Sakurai, Tokio: On the uniform circular motion of the center line of rotating circular cylindre in viscous fluid. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **21**, 43—46 (1939).

Im Verfolg einer größeren Anzahl Arbeiten des Verf. wird in der vorliegenden Arbeit das Problem der Rotation eines unendlich langen Kreiszylinders in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit behandelt. Der Zylinder rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um seine Figurenachse, während diese sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse bewegt. Die Stromfunktion, die die Bewegung der Flüssigkeit beschreibt, genügt, in Polarkoordinaten r, θ geschrieben, folgender Gleichung:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\omega}{\nu}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\psi=0.$$

Mit Verwendung früher erhaltener Ergebnisse wird die Gleichung der Stromfunktion für die nähere und weitere Umgebung des Zylinders gelöst. Außerdem wird das Resultat erhalten, daß das Widerstandsmoment um die Figurenachse unabhängig ist von der Winkelgeschwindigkeit ω der Figurenachse um die feste Achse, während die Widerstandskräfte an Figuren- und Festachse unabhängig von der Winkelgeschwindigkeit Ω des Zylinders um seine Achse sind. *E. Estel* (Leipzig).

Sakurai, Tokio: Charts and tables for flow produced by steady rotation of elliptic cylinder in viscous fluid. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **21**, 178—181 (1939).

Hayasi, Hirosi: On the problem of surface waves produced by an impulse upon the fluid. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **21**, 26—39 (1939).

Es werden die Oberflächenwellen berechnet, die unter dem Einfluß eines Impulses P entstehen, der auf einen endlich großen Bereich vom Radius a der Flüssigkeitsoberfläche wirkt. Die Berechnung erfolgt unter der Voraussetzung der Reibungslosigkeit, Inkompressibilität und Wirbelfreiheit. Der Lösungsweg ist analog dem von Widenbauer (Z. angew. Math. Mech. **14**, 321) angegebenen. Für die Oberflächenerhebungen wird der Ausdruck

$$\zeta=-\frac{P}{2^{1/2}\pi\varrho_0 a}\cdot\frac{t}{r^2}J_1\left(\frac{agt^2}{4r^2}\right)\sin\frac{gt^2}{4r}$$

gefunden, der bei Zusammenschrumpfen der Impulsfläche auf einen Punkt in die Lambsche Formel übergeht. Das Anwachsen der Amplitude mit zunehmender Zeit auf unendlich große Werte ist eine Folge des Grenzüberganges $a\to 0$ und wird für endliche a beseitigt, wie auch Widenbauer gezeigt hat. Ebenfalls in Übereinstimmung mit Widenbauer ergibt sich für die Zeit, die das n-te Maximum braucht, um an die Stelle r zu gelangen, der Ausdruck $t=2r\sqrt{\frac{a_n}{ag}}$, d. h. die maximalen Amplituden pflanzen sich mit konstanter Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ag}{a_n}}$ fort. Für den Fall, daß die wirksame Impulsfläche gleich der Flüssigkeitsoberfläche ist, wird für die Oberflächenerhebungen die Formel

$$\eta=-\frac{P}{\pi^{1/2}\varrho_0 a g^{1/2}x^{1/2}}\sin\left(\frac{agt^2}{4x^2}\right)\sin\left(\frac{gt^2}{4x}-\frac{\pi}{4}\right)$$

und für die Amplitudengeschwindigkeit $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ag}{\sqrt{3}}}$ angegeben. *E. Estel* (Leipzig).

Dubs, Werner: Über den Einfluß laminarer und turbulenter Strömung auf das Röntgenstreubild von Wasser und Nitrobenzol. Ein röntgenographischer Beitrag zum Turbulenzproblem. Helv. phys. Acta **12**, 169—228 (1939).

Die ausgeführten Messungen von Widerstandsbeiwert und Reynoldsscher Zahl bestätigen die Gesetze von Poiseuille und Blasius im Gebiet der laminaren und turbulenten Strömung. Gleichzeitig ergibt sich Übereinstimmung mit der Anlauftheorie von L. Schiller. Ferner bestätigen die Messungen die Feststellungen von L. Schiller, daß unterhalb von $Re_{krit}=2320$ durch keine noch so starke Störung Turbulenz erzeugt werden kann. Die photometrische Auswertung der Röntgenstreubilder, die, um den Einfluß der Gefäßwand (Streuung) auszuschalten, im freien Flüssigkeitsstrahl aufgenommen wurden, ergab eindeutig, daß im Röntgendiagramm ein großer, dem Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung entsprechender Effekt nicht besteht. Bei Nitrobenzol zeigen sich geringe Unterschiede zwischen den Streu-

kurven der laminaren und turbulenten Strömung, jedoch ist die Meßgenauigkeit gerade nicht mehr hinreichend, um diese dem Wechsel der Strömungsform mit Bestimmtheit zuschreiben zu können. *E. Estel* (Leipzig).

Schmeidler, Werner: Vortrieb und Widerstand. Z. angew. Math. Mech. **19**, 65—86 (1939).

In der vorliegenden Arbeit wird der bei der instationären Bewegung eines Tragflügels im Luftstrom auftretende Widerstand und Vortrieb berechnet. Im ersten Teil wird der zweidimensionale Fall behandelt. Es wird hier nur die infolge der periodischen Bewegungen des Tragflügels entstehende Zirkulationsverteilung untersucht, der sich in Wirklichkeit noch eine stationäre, von der Anblasung unter dem Anstellwinkel α herrührende Zirkulation überlagert. Verf. zeigt, daß bei jeder Zirkulationsverteilung infolge der zeitlichen Änderung ein positiver mittlerer, auf dem ablaufenden Wirbelband beruhender Widerstand entsteht. Weiterhin wird der durch die Bewegung des Flügels erzeugte Vortrieb berechnet, mit gleichzeitiger Lösung der Aufgabe, daß der Vortrieb für einen festen Wert des Widerstandes möglichst groß wird. Dabei zeigt sich, daß der Vortrieb beliebig groß gemacht werden kann, wenn man beliebige Deformationen der Tragfläche zuläßt. Man erkennt hierbei die Bedeutung elastischer Flächen für den Schwingenflug. Für den Fall der periodischen Parallelbewegung mit einer Anblasung unter dem Anstellwinkel $\alpha = 0$ stehen Vortrieb und instationärer Widerstand dagegen in einem festen, nur von ν/u abhängigen Verhältnis. — Der zweite Teil bringt die Ausdehnung auf den räumlichen Fall. Auch hier beschränkt sich die Behandlung auf die periodische Zirkulationsverteilung, deren Stetigkeit und Verschwinden in Spannweitenrichtung am Rande vorausgesetzt wird. Unter dieser Annahme wird für den instationären mittleren Widerstand eine allgemeingültige Formel hergeleitet. Für $\nu = 0$ geht diese über in die bekannte Formel der stationären Theorie, und wenn die Zirkulationsverteilung von y unabhängig und der Flügel sehr breit wird, ergibt sich — wie zu erwarten — der Widerstand der ebenen Strömung. Abschließend wird der Vortrieb berechnet und das Problem, die Differenz von Vortrieb und Widerstand zu einem Maximum zu machen, gelöst. *E. Estel* (Leipzig).

Hermans, J. J.: The calculation of surface viscosity from experimental results. (*William Ramsey Laborat. of Inorgan. a. Physic. Chem., Univ. Coll., London.*) Physica, Haag **6**, 313—320 (1939).

Pailloux, Henri: Sur la distribution dans l'espace des rotations d'une surface inextensible en mouvement. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 786—788 (1939).

In a previous paper (see this Zbl. **19**, 375) the velocity of a surface element at (x, y, z, t) was supposed to be given, it is now supposed that it is the rotation $\Omega(p, q, r)$ which is given. Conditions which the distribution of rotation should satisfy are sought. One of these is

$$\operatorname{div}\Omega[D(q,r)D(y,z)^{-1} + D(r,p)D(z,x)^{-1} + D(p,q)D(x,y)^{-1}] = D(p,q,r)D(x,y,z)^{-1}.$$

The variation with t of the mean curvature of the surface is also investigated. In particular it is found that if the surface is displaced so that its radii of curvature remain constant, it is a vortex surface for Ω. *H. Bateman* (Pasadena).

Sterne, T. E.: Apsidal motion in binary stars. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **99**, 451—462 (1939).

Die Säkularbewegung der Apsidenlinie wird für den Fall berechnet, daß die Komponenten des Doppelsternsystems kompressible Flüssigkeiten sind und daß die Periode der Bahnbewegung lang ist im Vergleich zu derjenigen der Eigenschwingungen der Komponenten. Die Entwicklung wird bis zur 10. Potenz der Abstände durchgeführt. Vergleich mit Rechnungen von Cowling (s. dies. Zbl. **19**, 383). *Klose* (Berlin).

Thermodynamik:

Giauque, W. F.: A proposal to redefine the thermodynamic temperature scale: with a parable of measures to improve weights. Nature, Lond. **143**, 623—626 (1939).

Statt der üblichen Festlegung der thermodynamischen Temperaturskala, bei der die Differenz zwischen Eis- und Kochpunkt des Wassers gleich einer festen Zahl gesetzt wird, wird eine andere vorgeschlagen, bei der die Temperatur des Eispunktes gleich einer festen

Zahl (etwa 273,2) gesetzt wird, und deren Vorteile erläutert. Zur Verdeutlichung wird eine Geschichte der Messung von Gewichten erfunden, die ein Abbild der Geschichte der Temperaturmessung ist. *F. Hund* (Leipzig).

Huber, A.: Über das Fortschreiten der Schmelzgrenze in einem linearen Leiter. Z. angew. Math. Mech. **19**, 1—21 (1939).

Um die bei der exakten Lösung des vorliegenden Problems bestehenden Schwierigkeiten zu umgehen, wird eine Näherungsmethode angegeben. Es wird zunächst die Lösung der Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial\theta}{\partial T} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ angegeben für einen Leiter, dessen Länge eine lineare Funktion der Zeit ist. Für die Abszissen Q_i seiner Enden gilt also: $Q_i = p_i T + q_i$ $(i = 1, 2)$, und die Bedingungen lauten: $\theta(X, 0) = \Phi(X)$ für $q_1 \leqq X \leqq q_2$ und $\theta(p_i T + q_i, T) = 0$, $\Phi(q_1) = \Phi(q_2) = 0$. Die Tangenten der „Schmelzkurve" $x = s(t)$, die den jeweiligen Ort der Schmelzgrenze angibt, kann man aus der gerade herrschenden Temperaturverteilung $\vartheta(x)$ auf Grund der Gleichung $\left[k_1\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x} - k_2\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}\right]_{x=s(t)} = \lambda\varrho\frac{ds}{dt}$ berechnen, die die Wärmebilanz an der Schmelzgrenze enthält. Ist die Temperaturverteilung $\vartheta = \varphi(t)$ für $t = 0$ gegeben, dann kann man so zunächst $\frac{ds}{dt}$ in den Punkten $x = q_1$ und $x = q_2$ berechnen und hieraus nach dem oben angedeuteten Näherungsverfahren die Temperaturverteilung für $t = \Delta t$, hieraus wieder $\frac{ds}{dt}$ für $t = \Delta t$ usw. *Fürth* (Prag).

Bock, Philippe: La distribution de la température dans un coin rectangulaire. J. Phys. Radium, VII. s. **10**, 241—244 (1939).

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird die Temperaturverteilung in einer durch zwei aufeinander senkrecht stehende Halbebenen begrenzten unendlichen Ecke untersucht. Für die Temperatur längs der einen Ebene wird angesetzt $e^{i\nu t}f(x)$, für die der anderen $e^{i\nu t}g(y)$. Die allgemeine Lösung der Wärmeleitungsgleichung wird durch Superposition zweier in der Form Fourierscher Integrale ausgedrückter Teillösungen erhalten. Im zweiten Teil handelt es sich um die Untersuchung der Temperaturverteilung in einem Viertel eines unendlich langen Zylinders. Die Lösung gelingt mit Hilfe Hankelscher Zylinderfunktionen. *E. Estel* (Leipzig).

Vernotte, Pierre: Convection de la chaleur à partir d'un plan où la distribution des températures est quelconque, par un fluide indéfini, à deux dimensions, dans lequel la distribution des vitesses est quelconque. Application à la loi de la convection naturelle. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 976—978 (1939).

Im Anschluß an frühere Arbeiten des Verf. [C. R. Acad. Sci. Paris, **201**, 1102 (1935); **205**, 21 (1937); **200**, 1919 (1935); **202**, 733 (1936)] wird eine Lösung der Differentialgleichung der Konvektion in Reihenform angegeben, wenn die Geschwindigkeitsverteilung in der Flüssigkeit und die Temperaturverteilung längs zweier Ebenen in Reihengestalt vorgegeben werden. *Walter Glaser* (Prag).

Malkin, N.: Sur la propagation de la chaleur dans un milieu à plusieurs couches. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **20**, 109—111 (1938).

Es wird die Wärmeausbreitung in einem Medium, das sich aus verschiedenen homogenen Schichten zusammensetzt, untersucht. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werden über die Temperatur vereinfachende Annahmen gemacht, die zu einer Umformung der allgemeinen Wärmeleitungsgleichung führen. Die Lösung erfolgt für jede Schicht getrennt, und zwar ergeben sich als Lösungen trigonometrische Funktionen für ebene Schichten und Besselfunktionen für zylindrische und kugelförmige Schichten. Die erhaltenen Lösungen werden zu einer einzigen vereinigt unter Benutzung der von A. N. Kryloff [Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. math. Nr. **1** (1937)] angegebenen Ergebnisse. Das Problem ist durch zwei Approximationen vollständig gelöst *E. Estel* (Leipzig).

Fischer, Johannes: Abkühlung und Erwärmung zylindrischer Rohre und geschichteter Zylinder. Ing.-Arch. **10**, 95—112 (1939).

Bei den betrachteten Ausgleichvorgängen wird vorausgesetzt, daß der Wärmestrom nur

in senkrechter Richtung zur Symmetrieachse fließt. Die örtliche und zeitliche Temperaturverteilung in einer Querschnittsebene wird durch die Wärmeleitungsgleichung $k^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}$ (u = Temperatur, k^2 = Temperaturleitfähigkeit) beschrieben, deren partikuläre Integrale zu Zylinderfunktionen führen. Jede Aufgabe ist nun mit einer solchen transzendenten Gleichung verbunden, die unabhängig von den besonderen Anfangsbedingungen bestimmt werden kann. Die Randbedingungen des Problems enthalten das zugrunde gelegte physikalische Abkühlungsgesetz; für den Fall des Newtonschen Abkühlungsgesetzes sind sie linear, d. h. mathematisch einfach, jedoch ist sein physikalischer Geltungsbereich auf kleine Temperaturdifferenzen beschränkt. Die geforderte Stetigkeit der Temperatur und der Wärmestromdichte an der Trennungsfläche kommt in den Grenzbedingungen zum Ausdruck. — Von grundlegender Bedeutung für den Lösungsweg ist die von Fourier behandelte Abkühlung des homogenen Kreiszylinders. Für eine Reihe verschiedener Bedingungen werden die Lösungen angegeben 1. für das kreiszylindrische Rohr mit Übergang zum homogenen Vollzylinder und als besonderes Anwendungsbeispiel die Messung thermischer Stoffeigenschaften aus dem Ausgleichvorgang bei dem Verfahren von Schleiermacher, 2. für den einmal geschichteten Vollzylinder (für jede der beiden Zonen wird eine besondere Wärmeleitungsgleichung angesetzt) und 3. für das einmal geschichtete Kreiszylinderrohr. — Die Funktionentafeln von Jahnke und Emde finden hierbei verbreitete Anwendung. *E. Estel* (Leipzig).

Elektrodynamik:

Gliozzi, Mario: Il contributo del Poisson all'elettrologia. Period. Mat., IV. s. **19**, 80—91 (1939).

Pastori, Maria: Principî variazionali del campo elettromagnetico. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **29**, 48—53 (1939).

Sobrero, L.: Sul numero dei punti in cui si annulla un campo elettrico piano. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **29**, 70—75 (1939).

Verf. erwähnt, daß es in vielen Fällen für die Feldberechnung vorteilhaft ist, auf direktem Wege die Feldstärkeverteilung zu ermitteln an Stelle der Potentialverteilung. Verf. betrachtet ein ebenes elektrostatisches Feld und zeigt, wie allgemein die Richtung der Feldstärke in der Umgebung eines Punktes mit der Feldstärke Null verläuft. Hierauf untersucht er, wie die Feldrichtung sich in der Umgebung eines Leiters verhält. Es ergibt sich eine Beziehung zwischen der Anzahl der Leiter und der Anzahl der Nullpunkte des Feldes. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Divilkovskij, M.: The problem of a sphere placed in a homogeneous alternating magnetic or electric field. J. techn. Physics, Leningrad **9**, 433—443 (1939) [Russisch].

Stefanesco, Sabba S.: Un cas particulier de lignes *H* algébriques. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **9**, 88—94 (1938).

Verf. studiert die Form der Gleichungen, welche die magnetischen Kraftlinien darstellen, für ein System fadenförmiger stationärer elektrischer Ströme. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit einem Fall, für den diese Gleichungen algebraisch vom 16ten Grade werden. Hierbei betrachtet Verf. vier in einer Ebene gelegene Stromfäden, die zusammen ein Quadrat bilden, und berechnet die magnetische Feldstärke in jedem Punkt des Raumes. Einfache Sonderfälle ergeben sich bei Betrachtung derjenigen Kraftlinien, welche in Symmetrieebenen verlaufen. Es zeigt sich, daß die Differentialgleichung für den Verlauf der Kraftlinien im Raum ein Partikularintegral vierten Grades besitzt. Verf. untersucht nun jene Kraftlinien, die auf einem System von Flächen vierten Grades gelegen sind. Der Durchschnitt dieser Flächen und Kraftlinien bzw. ihre Projektion in den Symmetrieebenen der Aufgabe werden diskutiert. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Blanco, Bartolome C.: A note on Heaviside's expansion theorem. Bol. mat. **12**, 64—66 (1939).

Es handelt sich um die Zerlegung des Ausdrucks für die komplexe Impedanz zwischen zwei Punkten eines verzweigten elektromagnetischen Netzes in Faktoren. Der reziproke Wert dieser Impedanz kann mit Hilfe dieser Faktoren in Partialbrüche zerlegt werden. Verf. beweist einen Satz über die algebraische Summe der Koeffizienten dieser Partialbrüche. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Quade, W.: Neue Darstellung der Verzerrungsleistung eines Wechselstroms mit Hilfe des Funktionenraums. Arch. Elektrotechn. **33**, 277—305 (1939).

Verf. benutzt für die Darstellung der Wirk-, Blind- und Scheinleistung eines nichtsinusförmigen Wechselstromes ohne Zuhilfenahme der Fourierzerlegung den Hilbertschen Funktionenraum und eine Abbildung dieses Raumes auf den mehrdimensionalen euklidischen Raum. Verf. führt den Begriff der konjugierten Spannung einer sinusförmigen Wechselspannung ein, wobei die konjugierte Spannung den gleichen Effektivwert hat und der ursprünglichen Wechselspannung um 90° voreilt. Er zeigt, daß dieser Begriff sich auch auf Wechselspannungen erweitern läßt, die durch eine Fouriersche Reihe dargestellt werden. Er drückt die konjugierte Spannung in diesem Fall durch eine Fouriersche Reihe sowie durch den Grenzwert eines bestimmten Integrales aus und beweist, daß dieser Grenzwert existiert. Er beweist einige Sätze über konjugierte Funktionen in diesem Sinne, zeigt ihre Eigenschaften an Hand einiger Beispiele und beweist, daß die oben angegebenen beiden Eigenschaften für eine sinusförmige Wechselspannung auch im allgemeinen gelten. Verf. betrachtet nun ein System von n Vektoren, die er n linear unabhängigen periodischen Funktionen der Zeit zuordnet. Er definiert mit Hilfe dieser Zuordnung die Begriffe Wirkleistung, Verschiebungsblindleistung, Verzerrungsleistung, Blindleistung und Scheinleistung, und zeigt den Zusammenhang mit der üblichen Fourierdarstellung. Für diese Begriffe beweist er eine Anzahl von Erhaltungssätzen. Der Begriff der Verzerrungsleistung wird einer Kritik unterzogen. Verf. diskutiert den Einfluß der Oberwellen auf die verschiedenen Leistungen, spaltet die Blindleistung auf neue Art auf und zeigt die Bedeutung der Erhaltungssätze für die genannten Begriffe. Vgl. auch die mit ähnlichen Begriffen, aber in bedeutend einfacherer Weise operierende Arbeit von S. Noda (vgl. dies. Zbl. **20**, 322). *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Kent, R. H.: The propagation of electric currents in terminated lines. Solutions of the telegraphic function. Phys. Rev., II. s. **55**, 762—768 (1939).

Verf. erwähnt die bisherigen, nach dem Vorgang Heavisides aufgestellten Berechnungsmethoden für den Stromverlauf in Leitungen, wobei an einem Ende eine Spannung angelegt wird. Von der Telegraphengleichung ausgehend, stellt er die Heavisidesche Lösung in Form bestimmter Integrale auf, wobei im Integranden Besselsche Funktionen erster Art nullter Ordnung auftreten. Diese Lösung spaltet er in zwei Teile auf, die physikalisch als hin- und rücklaufende Welle bezeichnet werden können. Durch Reihenentwicklung der genannten Besselschen Funktionen gelangt er zu unendlichen Reihenausdrücken für die Lösung. Diese Lösung wird auf den Fall angewandt, daß am einen Ende der Leitung eine Spannung angelegt wird, die eine vorgegebene Funktion der Zeit ist. Die Leitung ist hierbei an beiden Enden durch vorgegebene Zweipole abgeschlossen. Als Beispiel für die allgemeinen Formeln behandelt Verf. den Fall, daß in diesen Zweipolen nur Widerstände auftreten, wobei das ferne Ende der Leitung durch einen einfachen Widerstand abgeschlossen ist. Die entstehenden Kurven für den Stromverlauf als Funktion der Zeit werden gezeichnet und diskutiert. *M. J. O. Strutt.*

Djakov, Emil: Messung komplexer elektrischer Widerstände bei ultrahohen Frequenzen. Hochfrequenztechn. **53**, 54—60 (1939).

Verf. stellt die Formeln zusammen, welche zur Messung komplexer Widerstände mittels Resonanzkreisen benutzt werden. Hierauf gibt er Messungen bis etwa 10^8 Hz hinauf. Für Messungen bei höheren Frequenzen kommt das Paralleldrahtsystem in Betracht. Die Theorie der Resonanzkurve eines solchen Systems ohne und mit Eigendämpfung wird ausgearbeitet. Einige Sonderfälle dieser Gleichungen werden diskutiert. Experimentelle Untersuchungen bei etwa 144 und 64 cm Wellenlänge zeigen die Brauchbarkeit der Methode. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Placinteanu, Joan: Sur la propagation des ondes le long des fils. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1890—1891 (1939).

Verf. leitet die Formeln für die Dämpfung fortschreitender Wellen entlang einer Lecher-

leitung sowie die Verkürzung der Wellenlänge auf einer solchen Leitung gegenüber derjenigen im freien Raum ab und erwähnt, daß diese Formeln im Schrifttum manchmal in unrichtiger Weise angegeben werden. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Carbenay, Fernand: Sur les télécommunications en haute fréquence le long des lignes de transport d'énergie. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 981—983 (1939).

Verf. hat für eine sehr lange symmetrische Dreiphasen-Übertragungsleitung die Benutzung einer Phase zur Übertragung hochfrequenter Ströme betrachtet. Er hat die Impedanz dieser Phase am Eingang als Funktion der Impedanzen berechnet, welche die beiden anderen Phasen in bezug auf den Symmetriepunkt der Leitung aufweisen (Erde). Es zeigt sich, daß in einem Abstand vom Anfang, der mehrere Wellenlängen der hochfrequenten Schwingung beträgt, eine Schwächung der entlang der Übertragungsphase fortschreitenden Wellen eintritt, während die Spannungswellen der übrigen zwei Phasen eine Verstärkung aufweisen. Verf. drückt die Spannungswellen auf den drei Phasen in Form von hin- und zurücklaufenden Wellen formelmäßig aus und zeigt, daß die Fortpflanzungseigenschaften der Dreiphasenleitung von den Leitungskonstanten der einzelnen Phasen abhängen, die durch verschiedene Betriebsbedingungen der Übertragungsleitung bedeutend verändert werden können. *M. J. O. Strutt.*

Răduleţ, Remus: Stirnabflachung rechteckiger Wanderwellen auf Kraftübertragungsleitungen. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **9**, 95—105 (1938).

In dieser Arbeit werden neue Formeln für obiges Problem abgeleitet, welche den Vorteil einer bequemen zahlenmäßigen Auswertung aufweisen. Verf. geht von der Telegraphengleichung aus und benutzt für den Wechselstromwiderstand der Leiter als Funktion der Frequenz bekannte Näherungsformeln aus der Theorie des Hauteffektes. Die rechteckige Stirn einer Wanderwelle wird durch ein Fourierintegral dargestellt. Das Problem des Wellenrückens läßt sich hiermit in einfacher Weise lösen. Bei der Berechnung der Wellenstirn wird Verf. auf einige Integrale vom Fresnelschen Typus geführt. Für das Maximum des Spannungsgradienten längs der Leitung ergibt sich eine einfache geschlossene Formel. Zum Schluß untersucht Verf. den Verlauf einer periodischen Wanderwelle von rechteckiger Form. Verf. vergleicht seine Formel mit früheren Ergebnissen, die die Form einer unendlichen Reihe haben, und zeigt durch numerische Rechnung, daß für einen praktischen Fall ungefähr die gleichen Werte herauskommen. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Riedel, Heinrich: Der rechteckförmige metallische Hohlleiter als Übertragungsweg elektromagnetischer Wellen. Hochfrequenztechn. **53**, 122—129 (1939).

Bei der Berechnung der Feldverteilung geht Verf. von der Wellengleichung im Innern eines Hohlleiters der obengenannten Art aus. Die Grenzbedingungen an der Innenoberfläche des Leiters lauten: magnetische Feldstärke tangential und elektrische Feldstärke senkrecht zu dieser Oberfläche. Aus diesen Grenzbedingungen ergeben sich eine unendliche Anzahl von möglichen Wellentypen, welche sich in einem solchen Hohlleiter fortpflanzen können. Verf. klassifiziert diese Typen in vier Gruppen, die je unendlich viele Vertreter besitzen, und gibt für die einfachsten Vertreter jeder Gruppe Kraftlinienbilder an. Die Dämpfung, welche die Wellen beim Fortschreiten im Hohlleiter erfahren, berechnet Verf. aus der Leistung, welche die Wellen an der Innenoberfläche des Leiters verlieren. Er gibt Kurven für die Dämpfungskoeffizienten pro Längeneinheit der Leiter für die verschiedenen betrachteten Wellentypen. Aus dem Poyntingschen Satz ergibt sich auch der Wellenwiderstand der Leiter sowie der Energieinhalt eines vorgegebenen Volumens. Zum Schluß erwähnt Verf. die Zusammensetzung von Wellen verschiedener Gruppen und gibt hierfür Beispiele. *Strutt.*

Buchholz, Herbert: Der Einfluß der Krümmung von rechteckigen Hohlleitern auf das Phasenmaß ultrakurzer Wellen. Elektr. Nachr.-Techn. **16**, 73—85 (1939).

Es wird die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in rechteckigen Hohlleitern betrachtet, die kleine Krümmung aufweisen und die Form einer endlosen zylindrischen Schraubenspirale kleiner Ganghöhe besitzen. Zur Vorbereitung untersucht der Autor den geraden Hohlleiter bezüglich der Fortpflanzung von Transversalwellen (elektrischer oder magnetischer Vektor ganz in der Querschnittsebene) und findet allgemein, daß die Rohrwellenlänge stets größer ist als die entsprechende Vakuumwellenlänge und daß die Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldvektoren in der Querschnittsebene aufeinander senkrecht stehen. Für Längsschnittwellen ergeben sich die entsprechenden Beziehungen bezüglich der Längsschnittebene. Die Anwendung auf einen gekrümmten Hohlleiter verlangt die gleichzeitige Existenz der beiden Wellenarten, und die formale Lösung ist leicht anzugeben. Um das Fortpflanzungsmaß zu erhalten, ist es aber nötig, eine Bestimmungsgleichung mit Besselfunktionen nach

deren Ordnungszahl aufzulösen. Diese sehr schwierige Aufgabe wird näherungsweise und mit großem Aufwand mathematischer Umwandlungen durchgeführt mit dem Resultate, daß im schwach gekrümmten rechteckigen Hohlleiter Längsschnittwellen nur wenig verzerrt werden, Transversalwellen aber in gemischte Wellen übergeführt werden. *Ernst Weber.*

Hallén, Erik: Theoretical investigations into the transmitting and receiving qualities of antennae. Nova Acta Soc. Sci. Upsal., IV. s. **11**, Nr 4, 1—44 (1938).

Mit Bezug auf eine frühere Arbeit [Uppsala Univ., Årsskr. **1**, 24—37 (1930)] werden die Maxwellschen Gleichungen mittels der retardierten Potentiale in allgemeiner Weise für eine allgemeine Antenne mit beliebigem Empfangs- oder Sendekreis integriert und damit das Problem der Strom- und Feldverteilung auf die Lösung einer eindimensionalen Integralgleichung zurückgeführt, welche den Einfluß des Querschnittes, des Stromkreises usw. einschließt, nicht aber gilt für Endpunkte oder an scharfen Knicken. Die Anwendung auf eine Stabantenne mit abgestimmtem Schwingungskreis in der Mitte in einem allgemeinen Strahlungsfeld wird durch Integration über die Länge des Stabes mit Beachtung der Grenzbedingungen in die Form einer recht komplizierten Integralgleichung gebracht, deren Lösung die genaue Stromverteilung ergeben würde. Da es nicht möglich ist, die Lösung allgemein durchzuführen, beschränkt sich der Autor auf eine schrittweise Näherung. Eine sehr langwierige Rechnung für gleichmäßigen Querschnitt ergibt die Funktionen Integralsinus und Integralkosinus und eine lange Reihe von Hilfsgrößen, für die Kurven gezeigt werden. Es läßt sich schließlich die Impedanz berechnen und zeigen, daß die erste Näherung dieselbe Form hat wie unter der Annahme sinusförmiger Stromverteilung in der Antenne, daß aber die Abweichung der Stromverteilung starken Einfluß hat. Es wird auch gezeigt, daß die scheinbare Antennenverkürzung eine komplizierte Funktion mehrerer Parameter ist, und angedeutet, daß anscheinend widersprechende experimentelle Ergebnisse in Übereinstimmung gebracht werden könnten. Als zweite Illustration wird die Energieaufnahme einer Dipolempfangsantenne berechnet und nachgewiesen, daß das Maximum nicht mit normalem Feldeinfall zusammentreffen muß. Sodann wird die Kreisantenne mit eingesetztem Schwingungskreise wegen der theoretisch anziehenden Einfachheit behandelt; hier treten in der Berechnung der Eigenfrequenzen Besselfunktionen auf, doch wird eine genauere Diskussion auf einen späteren Zeitpunkt verschoben. Schließlich weist der Autor auf die Möglichkeit hin, auch den Empfang nichtstationärer Strahlung mit derselben Methode zu erfassen.
Ernst Weber (New York).

Wiechowski, W.: Dämpfungsberechnung bei Sendeantennen. Hochfrequenztechn. **53**, 50—54 (1939).

On the assumption that the distribution of current and voltage in an antenna is very similar to that of a damped circuit a number αh characterising the damping is derived by equating the rate at which energy is fed in to the rate at which energy is radiated. In the case of a homogeneous antenna supplied with current at the base this characteristic αh is expressed numerically in terms of the relative height h/λ of the antenna and the wave resistance, Z. — The equation $Z\,sh(\alpha h) = 2s(\alpha h)$ is solved graphically for $Z = 200$ using the curve for the specific radiation s as a function of αh. The quantities αh and s are then plotted as functions of h/λ_{ant} for different values of Z. — The distribution of current and voltage can then be found as well as the power and the external field. *H. Bateman* (Pasadena).

Banerjee, S. S.: On the critical dimensions of tuned transmitting circular loop aerials. Philos. Mag., VII. s. **27**, 174—181 (1939).

Verf. betrachtet eine Sendeantenne bestehend aus einem kreisförmig angeordneten Draht. Er berechnet das elektromagnetische Feld eines solchen kreisförmigen Leiters unter der Annahme einer sinusförmigen Strom- und Ladungsverteilung entlang der Leiterlänge. Hieraus ergeben sich die Eigenfrequenzen des Leiters. Experimentelle Ergebnisse bestätigen das Rechnungsergebnis. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Pol, Balth. van der, and H. Bremmer: Further note on the propagation of radio waves over a finitely conducting spherical earth. Philos. Mag., VII. s. 27, 261—275 (1939).

Verff. erwähnen, daß sie zur Lösung des genannten Problems zwei Methoden benutzt haben: Eine Erweiterung der zuerst von G. N. Watson angegebenen Reihenlösung und eine Lösung, die mit geometrisch-optischen Strahlen operiert, welche aus der exakten Lösung abgeleitet wurde. Sie stellen die Ausdrücke zusammen, welche mit diesen beiden Methoden gewonnen worden sind. Die Lösung enthält gewisse Funktionen der Höhe des Senders sowie des Empfangsgerätes über der Erde. Verff. geben für diese Funktionen Ausdrücke, welche durch asymptotische Berechnung der in der exakten Lösung auftretenden Besselschen Funktionen gewonnen wurden. Bei der „Strahlen"lösung tritt beim reflektierten Anteil ein Faktor auf, den Verff. als Divergenzfaktor bezeichnen und berechnen. Auch für den in dieser Lösung auftretenden Reflexionskoeffizienten geben sie einen Ausdruck. Diese Formeln werden numerisch ausgewertet. Die Ergebnisse werden in Kurven zusammengestellt, die eine vollständige Berechnung der Feldstärke für verschiedene Eigenschaften des Erdbodens gestatten.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Gray, Marion C.: Diffraction and refraction of a horizontally polarized electromagnetic wave over a spherical earth. Philos. Mag., VII. s. 27, 421—436 (1939).

To imitate the electromagnetic field generated above the surface of a spherical earth by a small horizontal loop carrying an electric current the author puts a magnetic dipole of moment M_1 at a point $(b, 0, 0)$ $(b \geqq a)$ and expresses the field vectors E, H at (r, θ, Φ) by components such as $E_r = E_\theta = H_\Phi = 0$, $E_\Phi = -i\omega\mu(\partial\Pi/\partial\theta)$ where

$$\Pi = A\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\,\zeta_m(k, b)\,(F_m/D_m)\,P_m(\cos\theta)$$

and F_m, D_m are certain combinations of Bessel functions. When $r = b = a$

$$\Pi = -iAz_1^{-2}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)N_m^{-1}P_m(\cos\theta)$$

where $N_m = \zeta_m'(z_1)/\zeta_m(z_1) - (k_2/k_1)\,\psi_m'(z_2)/\psi_m(z_1)$ and $z_1 = k_1\bar{a}$, $z_2 = k_2\bar{a}$, $\bar{a}$ being used to denote the effective radius of the earth when refraction is taken into account. The last series is transformed into a contour integral by Watson's method and expressed as a sum

$$2iAz_1^{-2}\sum_s[\nu_s/\cos(\nu_s\pi)]\,P_{\nu_s-\frac{1}{2}}(-\cos\theta)/[\partial N/\partial\nu]_{\nu=\nu_s}$$

where ν_s is the s-th root of the equation $N_{\nu-\frac{1}{2}} = 0$. It is found that the important values of ν are those near $\nu = z_1$ and so an asymptotic formula is found which is valid for small angles θ so long as $\nu\theta$ is not small, i. e., at distances which are large compared with the wave-length. Use is made here of the parameter τ_s of van der Pol and Bremmer which is defined by $\nu_s = z_1 + \tau_s z_1^{\frac{1}{3}}$. A comparison is made with the case of an electric dipole and it is shown in particular that the values of the earth constants matter less in the magnetic than in the electric case. — A study is then made of the effect of raising transmitter and receiver above the earth's surface and the effect of height is evaluated numerically.

H. Bateman (Pasadena).

Kupradze, V.: Zur Frage der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem inhomogenen ebenen Medium. Compositio Math. 6, 228—234 (1938).

When the incident waves are monochromatic the secondary field may be specified by means of a vector $u^* = R(e^{int}\cdot u)$. If, now the fields inside and outside the curve C are distinguished by the suffixes i and o we may write $u_i = v_i + iw_i$, $u_0 = v_0 - iw_0$ and Sommerfeld's radiation condition takes the form $v_0' - k_0 w = o(R^{-\frac{1}{2}})$, $w_0' + k_0 v_0 = o(R^{-\frac{1}{2}})$, where primes denote derivatives with respect to R and $R^2 = x^2 + y^2$. The analysis leads to an equation which may be interpreted physically as expressing the constancy

of the "quasienergy" in steady processes. This equation and the radiation conditions gives the asymptotic relations

$$\int_0^{2\pi} [R^{\frac{1}{2}}(v_0 \sin nt + w_0 \cos nt)]^2 d\alpha \to 0, \qquad \int_0^{2\pi} R^{\frac{1}{2}}(v_0' \cos nt - w_0' \sin nt)^2 d\alpha \to 0$$

and the equation $\int\int (\partial u_i^*/\partial t)^2 d\sigma = 0$ from which it follows that $v_i \sin nt + w_i \cos nt = 0$ and so $v_i = w_i = 0$. It is thus shown that the homogeneous integral equation which corresponds to the case of no incident field, has only the trivial solution $u = 0$. This proof is for the case in which the quantity σ in the equation $c^2 k_i^2 = n^2 \varepsilon\mu - in\sigma\mu$ is different from zero. Like Freudenthal the author treats the case $\sigma = 0$ by means of a Fourier series whose coefficients are Hankel functions of $k_0 r$. *Bateman.*

Fritsch, Volker, und W. Wiechowski: Beitrag zu den Grundzügen der Funkmutung nach dem sogenannten Antennenersatzkapazitätsverfahren. Hochfrequenztechn. **53**, 129—134 (1939).

Optik:

Rouard, Pierre: Sur un saut de phase de 2π dans la réflexion métallique. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1294—1296 (1939).

Breuninger, H. W.: Zur Phasenanomalie optischer Wellen, insbesondere von Kugelwellen. Ann. Physik, V. F. **35**, 228—250 (1939).

Die Arbeit ist ein mit Ergänzungen versehener Auszug aus der Jenaer Diss. des Verf. (Zur Theorie des Verhaltens der Phase konvergenter Kugelwellen usw. Borna 1938). Der Verf. unterwirft die bekannten Arbeiten von Reiche [Ann. Physik, IV. F. **29**, 65 (1909)], Debye [ebd. **30**, 755 (1909)] und Möbius [ebd. **33**, 79 (1910)] über die Phasenanomalie im Brennpunkt einer kritischen Betrachtung und erweitert und berichtigt zum Teil auch deren Ergebnisse. Auf die zahlreichen Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden. Es seien nur die behandelten Probleme aufgezählt: Phasenanomalie längs der optischen Achse für den Fall einer Kugelwelle und einer im Endlichen liegenden kreisförmigen Blende; Gesamtverlauf der Erscheinung für eine im Unendlichen befindliche kreisförmige Blende, und zwar für beliebige Öffnungswinkel des einfallenden Lichtbündels; Phasenanomalie längs der optischen Achse einer nicht kugelförmigen, zylindrischen oder rotationssymmetrischen einfallenden Lichtwelle mit rechteckiger bzw. kreisförmiger Blende und schließlich eine eingehende Diskussion der bei der Zeemanschen bzw. Sagnacschen Versuchsanordnung vorliegenden Verhältnisse. *Rubinowicz* (Lemberg).

Laval, Jean: Diffusion des rayons X par les cristaux en dehors des directions de réflexion sélective. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1512—1514 (1939).

Die zu einem einfallenden Röntgenstrahl im Kristall entstehenden Interferenzrichtungen sind im reziproken Gitter abzulesen: sie weisen vom Mittelpunkt der Ausbreitungskugel zu den auf ihrer Oberfläche liegenden Gitterpunkten. Dies gilt bei wellenkinematischer Denkweise für den unendlich ausgedehnten Kristall. Berücksichtigt man die Endlichkeit des Kristalls bzw. seine Mosaikstruktur sowie seine thermischen Gitterstörungen, so kann dies wellenkinematisch dadurch geschehen, daß um die Punkte des reziproken Gitters ein Interferenzbereich (mit komplexer Gewichtsfunktion des Streuvermögens) abgegrenzt wird. (Auch die dynamische Denkweise führt zu endlichen Winkelbereichen nicht verschwindender Interferenzintensität.) Der Verf. hat einige solche Bereiche für Reflexion von CuK_α und MoK_α an Sylvin mit Ionisierungskammer ausgemessen. Er findet bei den 002- und 004-Reflexen die Intensität rotationssymmetrisch um die ideale (wellenkinematische) Interferenzrichtung verteilt, während bei 006 offenbar Nachbarinterferenzen eine vierzählige Verteilung erzeugen. Die ganze Erscheinung erstreckte sich über einen beträchtlichen Bereich der reziproken Gitterzelle und soll nach Meinung des Verf. in erster Linie auf Temperatureinflüssen beruhen. *Fues.*

Relativitätstheorie:

Gomes, Ruy Luís: Les changements de référentiel et la cinématique des ensembles (de points). Quelques problèmes qui en dépendent. Portugalie Math. **1**, 181—203 (1938).

Given a configuration of points moving in any manner with respect to a galilean

frame of reference R, what is the motion of the system, considered as a whole, relative to another galilean frame R' moving with uniform velocity relative to R? The problem lacks the simplicity of the corresponding classical problem because points having the same time-coordinate in R have different time-coordinates in R'. The author obtains general formulae for the R'-description of a configuration whose motion in R is prescribed and uses them to find formulae for the aberration of light and for the motion of certain points, defined by formulae similar to those for the centre of mass, called the barycentres of the configuration. The work follows the lines of that of Esclangon (this Zbl. **16**, 281). *H. S. Ruse* (Southampton).

Dantzig, D. van: Stress tensor and particle density in special relativity theory. Nature, Lond. **143**, 855—856 (1939).

The stress-momentum-energy tensor of a relativistically perfect fluid in the absence of exterior forces is $T_{hk} = -(\varrho + p)\, i_h i_k + p g_{hk}$, where i^h is the velocity 4-vector of the macroscopic motion, p is the pressure and ϱ the proper energy-density. Some writers have held that ϱ/mc^2 (m the mass of one molecule) can be identified with the proper particle-density if the fluid is chemically homogeneous, but others have given the same interpretation to ϱ_0/mc^2, ($\varrho_0 = -T_i^i = \varrho - 3p$). The author now argues that the proper particle-density is neither ϱ/mc^2 nor ϱ_0/mc^2, but a third quantity $\bar{\varrho}/mc^2$ independent of both and not derivable from T_{hk} at all; though for an ideal gas of not excessively high temperature $\bar{\varrho}$ is approximately equal to $\frac{1}{2}(\varrho + \varrho_0)$.
H. S. Ruse (Southampton).

Pastori, Maria: I principali invarianti del campo elettromagnetico in teoria della relatività. Ist. Lombardo, Rend., III. s. **72**, 179—186 (1939).

Verf. betrachtet die wichtigsten Invarianten des elektromagnetischen Biventors F_{ij} und des Energietensors; sie werden in E, B, D und H ausgedrückt. *J. Haantjes.*

Dufour, Alexandre, et Fernand Prunier: Sur l'effet observé sur un disque de Sagnac en rotation quand une partie du circuit optique n'est pas entraînée. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 988—990 (1939).

Es wird eine Versuchsanordnung beschrieben, die gegenüber der ursprünglichen von Sagnac dahin abgeändert worden ist, daß ein Teil des optischen Strahlenganges an der Rotation der Scheibe nicht teilnimmt, indem er zwischen ruhenden Spiegeln geführt wird. Der Versuchsausfall zeigt, daß ein mit der Scheibe mitbewegter Beobachter nicht den Wert c für die Lichtgeschwindigkeit mißt, sondern einen um die Scheibengeschwindigkeit veränderten Wert. *Walter Glaser* (Prag).

Ives, Herbert E.: Behavior of an interferometer in a gravitational field. J. opt. Soc. Amer. **29**, 183—187 (1939).

Assuming that a body in a Newtonian gravitational field contracts in the direction of the field and that a moving body undergoes a Fitzgerald contraction, the author discusses the behaviour of light signals in an interferometer moving in a straight line in a central gravitational field. He deduces a formula for the undistorted length $\frac{1}{2}\,ds$ of an arm of the interferometer in which ds is formally the same as the Schwarzschild line-element in general relativity. *H. S. Ruse* (Southampton).

Watson, A. G. D.: Principal directions in a gravitational field. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. **6**, 12—16 (1939).

In a gravitational field the equations $G_{\lambda\varkappa} = \lambda g_{\lambda\varkappa}$ impose 10 conditions on the Riemann-Christoffel tensor. It is shown that the remaining 10 independent components can be used to define absolute coordinate directions at any point.
J. Haantjes (Amsterdam).

M'Crea, W. H.: Note on group theory and kinematical relativity. Proc. roy. Irish Acad. A **45**, 23—30 (1938).

Gruppentheoretische Betrachtungen zu Milnes kosmologischer Theorie. Der Übergang von einem „Beobachter" zu einem anderen ist eine Operation, welcher die Gruppeneigenschaft zukommen muß. Ausnützung dieses Umstandes ermöglicht eine vereinfachte Begründung einiger Milnesscher Formeln. *P. Jordan* (Rostock).

Hosokawa, Tôyomon: Finslerian wave geometry and Milne's world-structure. J. Sci. Hirosima Univ. A 8, 249—270 (1938).

Verf. betrachtet einen Finslerschen Raum mit

$$ds^2 = \{F(x, dx)\}^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j.$$

Die Differentialgleichungen, denen ξ^h genügen soll, damit die infinitesimale Transformation $\bar{x}^i = x^i + \xi^i \delta u$ die Längen und das zu g_{hi} gehörige Bahnsystem invariant läßt, werden angegeben. Verf. introduziert die $\gamma^A_{i\,B}(x, p)$, für die $\gamma_{(i}\gamma_{j)} = g_{ij}$ ist. Dabei ist $p^h = \dot{x}^h$ ein Vektorfeld, das der Gleichung $dp^h = \varphi^h_{ij} p^i dx^j$ genügt, wo φ^h_{ij} gegebene Funktionen sind vom Grade Null in p^h. Die Invarianz von $\gamma_i \varrho^i \psi = 0$ für pseudoparallele Verschiebungen von ϱ^i führt zu einer Differentialgleichung für $\psi^A(x, p)$. Die Integrabilitätsbedingungen werden diskutiert. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Temple, G.: Relativistic cosmology. Proc. phys. Soc., Lond. **51**, 465—478 (1939).

This paper was read at a discussion on the Expanding Universe held in London in January, 1939. It is essentially a review of developments in cosmological theory since Robertson published his report in 1933 (this Zbl. **6**, 231), but it also contains positive contributions to that theory. Part I of the paper is devoted to a discussion of general principles and methods. In Part II appears a version of Milne's theory in accordance with those general principles, together with a derivation of formulae for observable quantities (Doppler effect, nebular distribution, distance, etc.). These two parts comprise nearly half the paper, the remainder of which is devoted to cosmology in general relativity. Here the author gives a fresh analysis of general relativity in which the physical significance of parallelism (i.e. of connection between local galilean space-times of observers) is made fundamental. Taking Synge's definition of relative gravitational intensity (this Zbl. **16**, 421), he writes down the simplest relativistic generalisation of Poisson's law (namely that the divergence of gravitational force is proportional to the density of matter), and is at once able to deduce Einstein's field-equations. The cosmological constant appears automatically as a constant of integration. The concluding sections of the paper contain a derivation of Friedmann's equations and of observable quantities in the expanding universe, and also some remarks upon the topology of that universe. Whether empty space-time exists outside the portion actually occupied by matter, as is shown to be the case in Milne's universe, is left for future investigation. The author's final conclusion is that, if special relativity is adopted, the main hypotheses of cosmological theory lead inevitably to Milne's theory, with one arbitrary constant (the present age of our own nebula); and that, if general relativity is adopted, they lead to a metric of space-time which is perfectly definite except for three arbitrary constants. The solution of the cosmological problem must depend upon observational evidence and perhaps upon topological considerations of the type suggested by the author. *H. S. Ruse* (Southampton).

McVittie, G. C.: Observation and theory in cosmology. Proc. phys. Soc., Lond. **51**, 529—538 (1939).

The author points out that the usual procedure, as followed chiefly by Hubble, in comparing observations on extragalactic nebulae with the relativity theory of the expanding universe depends upon an intermediate stage in which the observations are summarized in empirical relations. These give the dependence of red-shift on apparent magnitude and the number of nebulae brighter than apparent magnitude m. They involve certain parameters, which, as the author points out, are evaluated by Hubble only by introducing additional and somewhat arbitrary assumptions. The present paper investigates the amount of information which can be got without making such assumptions. Incidentally, the author concludes that most of Hubble's additional assumptions are not valid in the expanding universes of general relativity. The main part of the paper is concerned with reducing a number of general relations for the latter, which the author has derived in previous papers (this Zbl. **17**, 335, 336; **18**, 384) to forms suitable for comparison with observation. The author's general conclusion

is that only less definite results than those given previously by Hubble and by himself are justified by this comparison. But he thinks it almost certain that space is hyperbolic, with radius probably between 10^8 and 10^9 parsecs, and that the mean density in the universe is not greater than 10^{-27} g/cm³, and probably of the order of 10^{-29} g/cm³. His method demands the use of estimates of the mean mass of a nebula, but not of its effective temperature. He infers that the value of the latter, which is consistent with his other results, lies between 5000 and 7500°. *W. H. McCrea.*

Mohorovičić, S.: Kosmischer Raum von variabler Krümmung und das Hubblesche Phänomen. Astron. Nachr. **268**, 361—372 (1939).

Müller, Paul Otto: Über die Eigenschwingungen der zylindrischen und sphärischen Welt. (*Inst. f. Theoret. Physik, Univ. Graz.*) Physik. Z. **40**, 366—384 (1939).

Die Wellengleichung wird zunächst aufgestellt für den kosmologischen Spezialfall der sog. Einsteinschen Zylinderwelt. Nach Einführung geeigneter Koordinaten und ihrer geometrischen Deutung wird die Wellengleichung durch einen Separationsansatz auf eine gewöhnliche lin. Diff.Gl. 2. O. reduziert, die ihrerseits in die hypergeometrische Diff. Gl. überführt wird. Die Forderung der Regularität liefert in bekannter Weise die Quantelung der Lösung. Spezielle Wellen werden ausführlicher diskutiert. Im weiteren werden analoge Rechnungen für die sog. de Sittersche Kugelwelt angestellt. Die Resultate sind weniger einfach. Doch wird gezeigt, daß in diesem Falle spezielle Wellen existieren, die durch Superposition zur Darstellung beliebiger Wellen führen.
Heckmann (Göttingen).

Atomphysik.

Statistik und kinetische Theorie der Materie:

Bell, D. A.: On the general validity of Nyquist's theorem. Philos. Mag., VII. s. **27**, 645—660 (1939).

Verf. untersucht die allgemeine Gültigkeit des obigen Theorems, wonach an den Enden eines beliebigen Widerstandes spontane Spannungsschwankungen auftreten, für die das Quadrat des quadratischen Mittelwertes proportional zur absoluten Temperatur, zum Widerstandswert und zum betrachteten Frequenzintervall ist. Er betont, daß bei sehr engen Frequenzintervallen eine entsprechend längere Beobachtungszeit notwendig ist, um den formelmäßigen Wert zu ermitteln. Er spaltet den allgemeinen Satz in drei Sätze, wobei er insbesondere auch auf das Verhalten nichtlinearer Widerstände eingeht. Für den Beweis benutzt er Widerstände, die in vollkommen isolierten Räumen bestimmter Temperatur eingekapselt sind. Aus dem thermodynamischen Gleichgewicht ergibt sich dann die Gültigkeit des Untersatzes, daß die Spannungsschwankungen für zwei Widerstände gleicher Temperatur gleich sind. Der genaue Wert der Spannungsschwankungen dagegen muß im wesentlichen als empirisch bestimmt angesehen werden. Als besonderen Widerstand betrachtet Verf. den Strahlungswiderstand einer Antenne. Er kommt zum Schluß, daß ein solcher Strahlungswiderstand nicht die Bedingungen erfüllt, welche für obiges Theorem vorausgesetzt werden müssen. Seine Behauptung, daß dieser Strahlungswiderstand sich wie eine Reaktanz verhält, kann kaum Anspruch auf Richtigkeit erheben. Er berechnet zum Schluß auf Grund dieser unrichtigen Annahme die Spannungsschwankungen einer Parallelschaltung eines solchen Strahlungswiderstandes mit einem abgestimmten Schwingungskreis.
M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Kristallbau und fester Körper:

Nissan, A. H., and L. V. W. Clark: Viscosity of liquids. Nature, Lond. **143**, 722—723 (1939).

Verff. zeigen, daß für die n-Paraffine ein funktionaler Zusammenhang zwischen dem Logarithmus der Viskosität und $\frac{1}{T}$ besteht, der entgegen der bekannten Beziehung $\eta = He^{\frac{B}{T}}$

nicht linear ist. In einem zweiten Diagramm haben sie für 137 Flüssigkeiten η_B/η_T gegen $\frac{T}{T_B}$ (T_B bzw. η_B ist die Temperatur bzw. die Viskosität am Siedepunkt) eingetragen und finden, daß man in diesem Diagramm drei Gebiete scharf unterscheiden kann, das Gebiet für metallische, für nicht assoziierte und für assoziierte Flüssigkeiten. Eine genauere Untersuchung ist in Aussicht gestellt. *Reinsberg* (Braunschweig).

Raman, C. V., and C. S. Venkateswaran: Rigidity of liquids. Nature, Lond. **143**, 798—799 (1939).

Beugungsaufnahmen monochromatischen Lichts an schwingendem Glycerin von 26° ergeben für „Hyper"-Schallfrequenzen von $\sim 10^7\,\mathrm{sec}^{-1}$ eine wesentlich niedrigere Schallgeschwindigkeit (1910 m/sec) als (2500 m/sec) für „Ultra"-Schallfrequenzen von $\sim 10^{10}\,\mathrm{sec}^{-1}$. Das läßt sich verstehen, wenn man mit den Verff. annimmt, daß für Schwingungen so hoher Frequenz das zähflüssige Glycerin sich als praktisch fest erweist, und diese Annahme wird gestützt durch die Temperaturabhängigkeit des beschriebenen Effekts: mit wachsender Temperatur, d. h. abnehmender Zähigkeit gleichen sich die beiden Schallgeschwindigkeiten einander an. Auch der im Bild gegebene Vergleich der Beugungserscheinungen an Flüssigkeiten verschiedener Zähigkeit deutet in gleicher Richtung. Die Abschätzung einer Relaxationszeit T nach einer Formel von Maxwell für die Zähigkeit $\eta = sT$ (s ein Scherungsmodul der festen Substanz) zeigt, daß im angegebenen Fall, wie erwartet, $10^{-7} \gg T \gg 10^{-10}\,\mathrm{sec}$. *Fues.*

Ornstein, L. S.: On the theory of liquid crystals. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **41**, 1046—1048 (1938).

A. v. Wijk und Ornstein (Z. Kristallogr. **79**, 112 (1931) haben gezeigt, daß der Winkel φ der Schwarmachsen einer kristallinen Flüssigkeit mit der Oberflächennormalen mit der Entfernung x des Schwarmes von der Oberfläche durch die Differentialgleichung $A\frac{d^2\varphi}{dx^2} - aH^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0$ verknüpft ist, worin H die Stärke eines in der Richtung der x-Achse wirkenden magnetischen Feldes bedeutet. In der vorliegenden Arbeit wird darauf aufmerksam gemacht, daß diese Gleichung nur in erster Näherung dann gültig ist, wenn die Trägheit der Schwärme und ihre Brownsche Bewegung vernachlässigbar sind. Die vollständige Differentialgleichung lautet $B\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \beta\frac{d\varphi}{dt} - F = \int f(x - x')g(\varphi - \varphi')dx' - aH^2\sin\varphi\cos\varphi$, worin F eine „zufällige" Kraft bedeutet. Gemäß dieser Gleichung existiert keine systematische Abhängigkeit der Schwarmorientierung φ von x. Setzt man für das Innere der Flüssigkeit den Wert des Integrals in der obigen Gleichung im Mittel gleich Null, dann ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit einer Schwarmorientierung zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ eine Boltzmannfunktion. Für die Oberflächenschicht der Flüssigkeit gilt indessen die van Wijksche Gleichung, die eine systematische Abhängigkeit der Schwarmorientierung von x ergibt. *Fürth* (Prag).

Chang, T. S.: The number of configurations in an assembly and cooperative phenomena. Proc. Cambridge Philos. Soc. **35**, 265—292 (1939).

Berechnung eines Näherungsausdrucks für die Anzahl der Möglichkeiten, n Teilchen auf N Plätzen eines Gitters so anzuordnen, daß die Zahl von Paaren benachbarter Teilchen gleich X ist. Dasselbe für die Zahl der Möglichkeiten, n zweiatomige Moleküle auf N Plätzen eines Gitters so anzuordnen, daß jedes der Moleküle zwei benachbarte Plätze besetzt und die Zahl der Paare benachbarter Teilchen, die verschiedenen Molekülen angehören, gleich X ist. (Vgl. auch dies. Zbl. **20**, 276.) Methode: Die Gleichgewichtseigenschaften, die sich nach der Methode von Bethe ergeben, werden mit allgemeinen statistischen Formeln verglichen. Im Fall eines linearen Gitters werden diese Ausdrücke direkt und exakt hergeleitet. — Anschließend werden formale Gleichungen für die Bildung einer Überstruktur in einer Legierung der Zusammensetzung 1 : 1 und Gleichungen für die Trennung regulärer Flüssigkeiten in

mehrere Phasen gegeben. Schließlich wird gezeigt, daß unter gewissen Bedingungen Atome bzw. Moleküle in einer regulären Flüssigkeit plötzlich rekombinieren bzw. dissoziieren können, wobei latente Wärme entsteht. *J. Meixner* (Gießen).

Lennard-Jones, J. E., and A. F. Devonshire: Critical and co-operative phenomena. IV. A theory of disorder in solids and liquids and the process of melting. Proc. roy. Soc., Lond. A **170,** 464—484 (1939).

Die in einer früheren Arbeit entwickelte Methode zur Behandlung des Schmelzvorgangs (dies. Zbl. **20,** 327) wird vereinfacht, indem nicht mehr die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Konfigurationen in der unmittelbaren Umgebung eines Atoms im Gitter untersucht werden, sondern indem angenommen wird, daß die Umgebung eines Atoms durch den mittleren Ordnungszustand der Gesamtheit beherrscht wird. Die Ergebnisse ändern sich dadurch nicht wesentlich. Die Schmelztemperatur, die Volumenänderung beim Schmelzen und der Ausdehnungskoeffizient im flüssigen Zustand lassen sich durch die Kräfte zwischen den einzelnen Atomen ausdrücken. Der Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen, bei Ne, A, N, CO, CH_4, H ist befriedigend. Die Lindemannsche Formel, die einen Zusammenhang zwischen der Schmelztemperatur und der Debyeschen charakteristischen Temperatur herstellt, wird für ein Kraftgesetz $Ar^{-n} - Br^{-m}$ zwischen zwei Atomen hergeleitet. Die Theorie liefert ferner eine kritische Temperatur, oberhalb der es keinen scharfen Übergang zwischen festem und flüssigem Zustand gibt. *J. Meixner* (Gießen).

Harasima, Akira: On the theory of fusion. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **21,** 156—165 (1939).

Unter Zugrundelegung eines einfachen Modells wird eine Theorie des Schmelzens entwickelt, indem die Verteilungsfunktion im festen und im flüssigen Zustand untersucht wird. Die beiden Zustände werden unter Bezugnahme auf die gegenseitige Wechselwirkung der Atome geeignet definiert. Ableitung der Lindemannschen Formel, Berechnung der Dichteänderung beim Schmelzen und des Drucks am Schmelzpunkt. *J. Meixner* (Gießen).

Chang, T. S.: Superlattice formation of the type AB in alloys with applications to the theory of adsorption. Proc. Cambridge Philos. Soc. **34,** 224—237 (1938).

Für Legierungen vom Typ AB wird bei verschiedener Zusammensetzung die Temperatur T_c berechnet, bei der die Fernordnung verschwindet, sowie der Sprung der spezifischen Wärme an diesem Punkt und der Grad der Fernordnung in der Nähe dieser Temperatur. Ferner wird die Veränderlichkeit der Nahordnung (nämlich die Wahrscheinlichkeit, daß ein Paar von benachbarten Plätzen durch verschiedene Atome besetzt ist) im ganzen Temperaturbereich berechnet; diese Kurven sind auch für $T = T_c$ stetig, haben aber innerhalb des Konzentrationsbereichs $(z - 1) : 1$ bis $1 : (z - 1)$ an der Stelle T_c einen charakteristischen Knick; außerhalb dieses Bereichs ist für keine Temperatur eine Fernordnung möglich. z ist die Anzahl der nächsten Nachbarn eines Atoms im Gitter. Die Fälle $z = 6$ bzw. 8 sind graphisch dargestellt. — Die Rechnungen lassen sich unmittelbar auf die Adsorption von Gasen auf festen Oberflächen übertragen, wenn die zur Verfügung stehenden Plätze in der Oberfläche regelmäßig angeordnet sind. Unter gewissen Bedingungen ist in der adsorbierten Schicht eine Überstruktur möglich. *J. Meixner* (Gießen).

Elektronentheorie:

Agostinelli, Cataldo: Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in un campo magnetico simmetrico rispetto a un asse e integrazione del problema in un caso particolare. Atti Accad. Sci. Torino **74,** 69—85 (1939). °°

Agostinelli, Cataldo: Integrazione dell'equazione di Jacobi alla quale dà luogo il problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend , VI. s. **28,** 183—188 (1938).

Verf. geht von der Jacobischen Differentialgleichung für die Bewegung eines

geladenen Punktes im Felde eines magnetischen Dipoles aus. In einer vorigen Arbeit hat Verf. eine Näherungslösung dieser Differentialgleichung angegeben, bei der ein Parameter, der das Dipolmoment, die elektrische Ladung und die Masse der Punktladung enthält, klein in bezug auf 1 gesetzt wurde. In der vorliegenden Arbeit führt Verf. einen zunächst willkürlichen neuen Parameter in die Differentialgleichung ein und gibt eine Näherungslösung an, welche nach ganzen positiven Potenzen dieses Parameters fortschreitet. Die verschiedenen Glieder der erhaltenen Potenzreihe werden in rekurrenter Weise berechnet. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Agostinelli, C.: Integrazione dell'equazione di Jacobi alla quale dà luogo il problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **28**, 189—193 (1938).

Verf. studiert die Konvergenz der in einer vorhergehenden Arbeit aufgestellten Reihenlösung der in der Überschrift genannten Differentialgleichung. Er stellt obere Grenzen auf für die verschiedenen Ausdrücke, welche bei der Berechnung der Koeffizienten der Reihenlösung auftreten. Hieraus ergibt sich, daß die aufgestellte Lösung bei bestimmten Anfangswerten für die gegenseitige Lage des Dipoles und der Punktladung absolut konvergiert und somit eine vollständige Lösung der gestellten Aufgabe darstellt. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Fremlin, J. H.: Calculation of triode constants. Philos. Mag., VII. s. **27**, 709—741 (1939).

Bei der Berechnung des Anodenstromes als Funktion der Steuergitterspannung einer Triode ist es üblich, eine Ersatzdiode einzuführen, deren Anode die Stelle des Gitters der Triode einnimmt und deren Anodenspannung gleich der Steuerspannung der Triode ist, die sich linear aus der Anodenspannung und der Gitterspannung der Triode zusammensetzt. Verf. gibt für diese übliche Rechnung eine korrigierte Formel an, wobei er den Einfluß der Raumladung auf den Potentialverlauf in der Triode berücksichtigt, wofür er experimentelle Bestätigungen bringt. Hierauf leitet er eine neue Durchgriffsformel für die Triode ab, wobei die üblichen Bedingungen, Drahthalbmesser des Gitters klein gegenüber den übrigen Abmessungen und Gitterdrahtabstand kleiner als die Abstände des Gitters von den beiden übrigen Elektroden, nicht erfüllt sein brauchen. Bei der Ableitung macht er von dem Verlauf der Ladungsverteilung auf der Kathode der Triode Gebrauch und benutzt diese zur Berechnung eines mittleren Wertes für den Durchgriff. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Raman, Venkata, and K. S. Venkataraman: Determination of the adiabatic piezooptic coefficient of liquids. Proc. roy. Soc., Lond. A **171**, 137—147 (1939).

Bei der Beugung von Licht durch Ultraschallwellen und bei der Lichtstreuung an den Debyeschen Wellen der thermischen Bewegung in Flüssigkeiten ist die Kenntnis der Abhängigkeit des Brechungsindex μ vom Druck p bei adiabatischen und nicht bei isothermen Änderungen erforderlich. Es wird eine experimentelle Methode entwickelt, die den adiabatischen piezooptischen Koeffizienten $\partial\mu/\partial p$ einfacher und mit größerer Genauigkeit zu bestimmen gestattet als den entsprechenden isothermen Koeffizienten. Die Messungsergebnisse werden hinsichtlich der Abweichungen von der Lorentzschen Refraktionsformel, der Abhängigkeit des Brechungsindex von der Temperatur bei konstanter Dichte, der Beziehung zwischen den isothermen und den adiabatischen piezooptischen Koeffizienten diskutiert. *J. Meixner* (Gießen).

Nicht-relativistische Quantentheorie:

Dirac, P. A. M.: The relation between mathematics and physics. Proc. roy. Soc. Edinburgh **59**, 122—129 (1939).

Grundsätzliche Gedanken über genanntes Thema. Eine „mathematical quality in Nature" muß verantwortlich sein für die merkwürdige Tatsache, daß ein Suchen nach mathematisch schönen Formulierungen zur Aufdeckung wirklicher Naturgesetze führen kann. Diese eigentümliche Kongruenz des Mathematischen und des physikalisch Wirklichen geht so weit, daß man — über die Ergebnisse der letzten Entwicklungen der Physik (Relativitätstheorie, Quantentheorie) hinaus extrapolierend — vermuten

möchte, daß jeder Zweig der reinen Mathematik eine physikalische Anwendung finden wird, in einem Ausmaß und einer Bedeutung, welche der rein mathematischen Bedeutung des fraglichen Zweiges analog ist. Die neuere Entwicklung der Physik wird in diesen Zusammenhängen näher besprochen; insbesondere auch die Kosmologie findet dabei nähere Berücksichtigung. In Verbindung mit seiner Analyse des bislang Erreichten gibt der Verf. Ausblicke betreffs der künftigen Entwicklung.

P. Jordan (Rostock).

Février, Paulette: Sur le caractère objectif de l'indiscernabilité. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1137—1139 (1939).

Zuerst wird festgestellt, daß zwei physikalische Theorien nur dann als gleichwertig anzusehen sind, wenn sie die gleichen Ergebnisse und Voraussagen liefern und wenn jeder Aussage über Erfahrbares in der einen Theorie in ein-eindeutiger Weise eine Aussage über Erfahrbares in der anderen entspricht. Dieses Kriterium wird auf den Fall der Unterscheidbarkeit von Teilchen angewandt und „gezeigt", daß zwei Theorien nicht gleichwertig sein können, wenn die eine Unterscheidbarkeit und die andere Nichtunterscheidbarkeit behauptet. Der „Beweis" beruht darauf, daß man nicht eine Behauptung und ihr Gegenteil für den gleichen Gegenstand aufstellen kann, nämlich darauf, daß man die Teilchen eben unterscheiden kann, wenn man sie unterscheiden kann und nicht behaupten kann, daß man sie nicht unterscheiden könne.

Bechert (Gießen).

Piekara, Arcadius: Sur la variation thermique de la biréfringence magnétique des liquides polaires. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1150—1152 (1939).

Verf. berechnete (dies. Zbl. **20**, 414) unter der Annahme, daß je zwei Moleküle besonders eng miteinander gekoppelt sind, den Reduktionsfaktor der Cotton-Mouton-Konstanten zu $R(y) = 2 - 3\frac{L(y)}{y}$, worin $y = \frac{E}{kT}$ (E = Kopplungsenergie) und $L(y)$ die Langevinsche Funktion ist. Zur Bestimmung der Temperaturabhängigkeit nimmt der Verf. jetzt an, daß sich die beiden gekoppelten Moleküle wie ein starrer Körper bei Temperaturerhöhung ausdehnen und kann dann y darstellen in der Form $y = \frac{y_{20^\circ}}{1+\alpha(T+293)} \cdot \frac{293}{T}$, worin α der mittlere kubische Ausdehnungskoeffizient ist. Mit Hilfe der so abgewandelten Formel ergibt sich für eine Lösung von Nitrobenzol in Tetrachlorkohlenstoff eine befriedigende Übereinstimmung der berechneten Werte mit den gemessenen.

Reinsberg (Braunschweig).

Mott, N. F.: The theory of crystal rectifiers. Proc. roy. Soc. Lond. A **171**, 27—38 (1939).

Verf. gibt in der vorliegenden Arbeit eine neue Theorie der Gleichrichterwirkung eines Kontaktes zwischen Metall und Halbleiter. Im Gegensatz zur bisherigen Theorie des Detektors von A. H. Wilson u. a. spielt im Mottschen Modell der wellenmechanische Tunneleffekt bei der Überwindung des Kontaktes durch die Elektronen keine Rolle. Vielmehr ist die in Betracht kommende zu durchdringende Kontaktschicht hierzu viel zu dick, nämlich von der Größenordnung von 10^{-3} cm; die übergehenden Elektronen müssen daher die klassisch zur Überwindung der Potentialschwelle, die der Kontakt darstellt, erforderliche Energie besitzen. Durch das neue Modell wird der Richtungssinn der Ventilwirkung im Falle des Cu-Cu_2O-Gleichrichters gegenüber der alten Theorie umgekehrt und mit der Beobachtung in Einklang gebracht. *Maue.*

Procopiu, Stéfan: Détermination de l'épaisseur de la plus mince couche de fer, électrolytique, à laquelle disparaissent les discontinuités d'aimantation. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1212—1214 (1939).

Aus Versuchen über die Unstetigkeiten der Magnetisierung dünner Eisenschichten, die elektrolytisch auf Kupferdrähten abgeschieden sind, wird auf eine untere Grenze von etwa 1,75 μ für die Lineardimensionen der Weißschen Bezirke geschlossen. *J. Meixner.*

Laer, P. H. van, and H. J. Groenewold: On the relaxation connected with the transition from the superconductive into the normal state. Physica, Haag **6**, 473—480 (1939).

Es wird gezeigt, daß der Vorschlag von Smith und Mann [Phys. Rev. **54**, 766 (1938)], die Relaxationserscheinungen, die bei magnetischen Versuchen an Supraleitern am Übergangspunkt zwischen normalem und supraleitendem Zustand beobachtet werden, sollten dieselbe Ursache haben wie die Relaxationserscheinungen, die bei kalorimetrischen Versuchen auftreten, den Erfahrungstatsachen widerspricht. Zur

Beschreibung der Übergangserscheinungen bei Erwärmung des Materials wird eine einfache Formel angegeben. *Bechert* (Gießen).

Relativistische Quantentheorie:

Nikolsky, K.: On a certain problem in the theory of characteristics. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 22, 494—495 (1939).

L'auteur écrit des matrices permettant d'obtenir les équations de Maxwell pour le vide, en linéarisant les équations du second ordre que satisfont les potentiels. *A. Proca* (Paris).

Wheeler, John A., and Willis E. Lamb jr.: Influence of atomic electrons on radiation and pair production. Phys. Rev., II. s. 55, 858—862 (1939).

Die Stöße mit Hüllenelektronen geben einen Beitrag zur Bremsstrahlung und Paarerzeugung, der zur Ordnungszahl proportional ist. Für Luft wird dadurch die für die Theorie der Kaskadenschauer charakteristische Länge um 17% verkleinert. *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

Born, M., and K. Fuchs: On fluctuations in electromagnetic radiation. Proc. roy. Soc., Lond. A 170, 252—265 (1939).

Die thermodynamisch aus dem Planckschen Gesetz ableitbare Formel $\overline{\Delta E_\nu^2} = \frac{\overline{E}_\nu^2}{z_\nu V} + h\nu \cdot \overline{E}_\nu$ für die Schwankungen der Energie im Strahlungshohlraum ist von Born-Heisenberg-Jordan quantenmechanisch (ohne Zuhilfenahme der Thermodynamik) abgeleitet worden: diese Ableitung zeigte, daß man eine geschlossene, widerspruchsfreie und die „Lichtquanten" von selbst ergebende Theorie erhält, indem man auf das Maxwellsche Feld die Quantenmechanik anwendet. Später hat Heisenberg in einer kritischen Betrachtung die Anbringung einer gewissen (prinzipiell unwichtigen) Verfeinerung an den damaligen Betrachtungen als notwendig bezeichnet. Die vorliegende erneute Untersuchung des Problems, die z. B. durch Mitberücksichtigung der Polarisationsverhältnisse der Strahlung etwas vollständiger als die bisherigen ist, führt die Verff. zu einer erheblichen Einschränkung der Bedeutung dieser Verfeinerung. Andererseits glauben die Verff., in der ursprünglichen Ableitung von Born-Heisenberg-Jordan einen Fehler gefunden zu haben; nach Ansicht des Ref. ist dies jedoch ein Irrtum. *P. Jordan* (Rostock).

Nikolsky, K.: On the problem of mass of an elementary particle. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 22, 481—485 (1939).

L étant la fonction de Lagrange d'un électron de Dirac de masse m, l'auteur essaie de mettre le coefficient de $mc/\hbar$ dans δL sous forme d'une différence de termes non-linéaires, représentant la réaction du champ matériel de la particule sur elle-même. Il espère ainsi mieux voir quels sont les termes à supprimer ou ajouter pour transformer la théorie linéaire de l'électron en une théorie non-linéaire, du type de Mie-Born, seule manière d'interpréter correctement le problème de la masse en accord avec les idées modernes de la mécanique quantique. *A. Proca* (Paris).

Nikolsky, K.: On the theory of the relativistic quantum particle. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 22, 486—493 (1939).

L'auteur écrit et étudie les relations différentielles existant entre les grandeurs tensorielles quadratiques $\psi^* \xi \psi$ et $i(\partial \psi^*/\partial x^k \cdot \eta \psi - \psi^* \eta \cdot \partial \psi/\partial x^k)$ où ψ sont les solutions de l'équation de Dirac et ξ, η les opérateurs formés par les produits des α_r fondamentaux. *A. Proca* (Paris).

Broglie, Louis de: Sur un cas de réductibilité en mécanique ondulatoire des particules de spin. I. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1697—1700 (1939).

Die von de Broglie als Wellengleichung des Photons aufgestellten 16 Gleichungen für 16 Wellenfunktionen können zerlegt werden in zwei ganz unabhängige Systeme: 10 der 16 Wellenfunktionen erfüllen für sich allein die Proca-Yukawaschen Gleichungen, und die übrigen 6 ein andersartiges von O. Klein in anderem Zusammenhang auf-

gestelltes Gleichungssystem. Es wird darauf hingewiesen, daß beide Gleichungssysteme einem Spin entsprechen, der gleich 1 oder gleich 0 ist, wobei aber auch im Falle der Proca-Yukawa-Gleichungen keine lorentzinvariante Trennung der Fälle 1 und 0 möglich ist. *P. Jordan* (Rostock).

Caldirola, P.: Le equazioni del mesotrone e interpretazione di risultati dedotti dalle equazioni gravitazionali sotto una nuova forma. Nuovo Cimento, N. s. **16,** 14—19 (1939).

Les lois fondamentales étant exprimées en égalant à zéro la divergence d'univers de $G_i^j = R_i^j - \frac{1}{2} g_i^j R$, l'auteur remarque que l'on peut obtenir: 1° les équations du champ électromagnétique F_{ik} et les équations de Klein-Gordon en l'absence de champ, si l'on „décompose" le tenseur de Riemann R_i^j en $R_i^j = F_{ik}F^{jk} + \frac{h^2 c^2}{4\pi^2} \varphi_i \varphi^j$ (F_{ik} tenseur antisymétrique et φ_i vecteur d'univers); et 2° les équations du champ électromagnétique et les équations vectorielles du mésoton lorsqu'on prend comme „décomposition": $R_i^j = F_{ik}F^{jk} + X_{ik}X^{jk} + \lambda^2 \Phi_i \Phi^j$ les X_{ik} étant fonctions uniquement des Φ_r. — Ces constatations donnent lieu à certaines observations concernant l'analogie entre champs matériels et électromagnétiques, basées essentiellement sur l'analogie de forme entre les équations de Maxwell et celles du mésoton. *A. Proca* (Paris).

Petiau, Gérard: Sur les grandeurs électromagnétiques de la théorie du photon. C. R. Acad. Sci., Paris **208,** 969—971 (1939).

Utilisant la forme générale de la solution des équations du photon de L. de Broglie (voir Petiau, ce Zbl. **18,** 217), l'auteur calcule les grandeurs éléctromagnétiques et discute leurs relations. La théorie du photon prend ainsi l'aspect d'une théorie bi-vectorielle, $\vec{E}$ et $\vec{H}$ pouvant être exprimés en fonction de deux vecteurs d'univers. *A. Proca* (Paris).

Fröhlich, H., W. Heitler and B. Kahn: Deviation from the Coulomb law for the proton. Proc. Roy. Soc., Lond. A **171,** 269—280 (1939).

Aus der Yukawaschen Theorie folgt eine (mit der Selbstenergie verknüpfte und daher problematische) Abstoßung zwischen Proton und Elektron beim Abstand von weniger als einem Fünftel Elektronenradius. Experimente von R. C. Williams [Physic. Rev. **54,** 558 (1938)] über die Wasserstoff-Feinstruktur weisen in dieser Richtung. *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

Marques da Silva, Aurelio: Contribution à l'étude de la matérialisation de l'énergie. Ann. Phys., Paris **11,** 504—547 (1939).

Untersuchungen mit der Wilsonkammer: Bestätigung des von Skobeltzyn und Stephanowa [J. Phys. **6,** 1 (1935)] gefundenen großen Wirkungsquerschnitts (10^{-22} cm²) für die Materialisation der kinetischen Energie schneller Elektronen (β-Strahlen von RaC) in Blei, welcher größer ist als der Paarbildungsquerschnitt für γ-Quanten derselben Energie. Proportionalität des Effekts mit Z (nicht mit Z^2!). Kritik an der bisherigen theoretischen Behandlung des Problems. — Beobachtung von Paarbildung aus einem γ-Quant im Felde eines Elektrons, Übereinstimmung mit Rechnungen Perrins [C. R. Acad. Sci., Paris **197,** 1100 (1933)]. *H. Jensen* (Hamburg).

Gurevich, I., and G. Rieck: On the distribution of nuclear levels. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Physique Nr **5/6,** 771—779 u. engl. Zusammenfassung 780 (1938) [Russisch].

Vergleich der Formeln für die Niveaudichte nach dem statistischen Modell mit der Erfahrung. *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

Creutz, E. C.: The resonance scattering of protons by lithium. Phys. Rev., II. s. **55,** 819—824 (1939).

Die Protonenstreuung an ^{7}Li zeigt ein Resonanzmaximum bei 440 kV Protonenenergie, bei der Tuve und Hafstad [Phys. Rev. **47,** 506 (1935)] eine Resonanzstelle für die Emission harter γ-Strahlung gefunden hatten. Das zeigt, daß ein angeregtes Niveau des Zwischenkerns ^{8}Be* für die γ-Emission verantwortlich sein muß:

$$^7\mathrm{Li} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow {}^8\mathrm{Be}^* \begin{cases} \nearrow {}^7\mathrm{Li} + {}^1\mathrm{H}, & (1) \\ \rightarrow {}^8\mathrm{Be} + \gamma, & (2) \\ \searrow 2\alpha + \text{kin. Energie}, & (3) \end{cases}$$

während man früher die γ-Strahlung einem intermediär gebildeten angeregten α-Teilchen zugeschrieben hatte. Die Häufigkeit von (1) gegenüber (3) gestattet Rückschlüsse auf den Symmetriecharakter des angeregten Be-Niveaus zu machen. *H. Jensen* (Hamburg).

Beck, Guido, et Peter Havas: Sur le ralentissement dans l'air des fragments atomiques résultant de l'explosion de l'uranium. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1643—1645 (1939).

Theorie der Bremsung und des Elektroneneinfangs der anfangs hochionisierten Trümmer bei der Hahnschen Uranspaltung. — Der Wiedereinfang der Elektronen beruht nach Rechnungen der Verff. in erster Linie nicht auf Einfang unter Emission von Röntgenstrahlung, sondern auf strahlungslosen Prozessen (Augereffekt), bei denen die frei werdende Energie einem zweiten Elektron desselben Luftmoleküls übertragen wird, dem das eingefangene Elektron entzogen wird. — Explizite Formeln für den Energieverlust pro cm Weg und für die Reichweite. *H. Jensen* (Hamburg).

Lieber, Clara: Die Spaltprodukte aus der Bestrahlung des Urans mit Neutronen: Die Strontium-Isotope. Naturwiss. **27**, 421—423 (1939).

Es werden die Strontium-Isotope mit 7 min, 6 Stunden und 54 Tagen Halbwertszeit festgestellt. Aus dem Strontium mit 6 Stunden entsteht ein Yttrium mit 3,5 Stunden Halbwertszeit. *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

Booth, E. T., J. R. Dunning and F. G. Slack: Delayed neutron emission from uranium. Phys. Rev., II. s. **55**, 876 (1939).

Die nach der Beschießung von Uran mit Neutronen verzögert emittierten Neutronen [Roberts, Meyer u. Wang, Phys. Rev. **55**, 510 (1939)] treten einmal auf 60 Uranspaltungen auf. Sie werden nach dem $1/v$-Gesetz erzeugt, zeigen zwei Zerfallsperioden von rund 10 und 40 sec und werden als Folgeerscheinungen des β-Zerfalls von Spaltungsprodukten erklärt. *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

Perrin, Francis: Calcul relatif aux conditions éventuelles de transmutation en chaîne de l'uranium. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1573—1575 (1939).

Man kann die Energieerzeugung durch Neutronen in Uran stabilisieren durch Hinzufügung von Wasserstoff und Kadmium; H verlangsamt die Neutronen, Cd fängt einen um so größeren Bruchteil der thermischen Neutronen ab, je höher die Temperatur ist. Verf. berechnet für U_3O_8 als Pulver mit 3% Wassergehalt und einem Zehntausendstel Kadmium einen kubischen Radius der Urankugel von 65 cm für Zimmertemperatur und 80 cm für 900° C. *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

Kennedy, J. W., and G. T. Seaborg: Search for beta-particles emitted during uranium fission process. Phys. Rev., II. s. **55**, 877 (1939).

Keine mit der Uranspaltung gleichzeitigen β-Teilchen werden gefunden. *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

Aten jr., A. H. W., C. J. Bakker and F. A. Heyn: Transmutation of thorium by neutrons. Nature, Lond. **143**, 679 (1939).

Chemische Abtrennung der beim Aufspalten des Urans durch Neutronen entstehenden radioaktiven Edelgase. Untersuchung der Aktivitäten ihrer Folgeprodukte. Übereinstimmung mit Hahn und Strassmann (vgl. dies. Zbl. **20**, 421). — Dieselben Versuche beim Aufspalten des Thoriums durch schnelle Neutronen. Es entstehen die gleichen aktiven Edelgase und Folgeprodukte wie beim Uran: Xe, Cs (10 und 33 min), Ba^{139} (87 min), — und Kr, Rb^{88} (17 min), Sr (inaktiv). *H. Jensen* (Hamburg).

Kobayasi, Minoru, and Taisuke Okayama: On the creation and annihilation of heavy quanta in matter. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **21**, 1—13 (1939).

Les processus envisagés sont l'absorption d'un photon par une particule lourde avec émission consécutive d'un mésoton, et le processus inverse. On calcule la section efficace correspondante en utilisant la théorie vectorielle du mésoton; noter que, dans l'hamiltonien, on ne néglige pas le terme d'interaction „directe" entre photons, mésotons et particules lourdes (contenant à la fois les fonctions d'ondes de ces trois particules). E_0 étant l'énergie du photon incident et m_u la masse du mésoton, on considère les deux cas: 1. $E_0 - m_u c^2 \ll m_u c^2$ et 2. $E_0 \gg m_u c^2$. Dans le processus direct, la section efficace nucléaire est respectivement $6\pi(N+Z)\left(\frac{ge}{m_u c^2}\right)^2 \frac{v}{c}$ et $\pi(N+Z)\left(\frac{ge}{m_u c^2}\right)^2$, N et Z étant le nombre des neutrons et de protons et v la vitesse du mésoton émis. Cette section croît rapidement avec l'énergie du photon incident, pour atteindre une valeur constante (la dernière ci-dessus) aux grandes énergies. — Les

calculs précédents ne sont pas valables si l'on accepte le criterium proposé par Heisenberg [voir Z. Physik **110**, 251 (1938)] pour la validité de la mécanique quantique. Néanmoins, se basant sur les résultats satisfaisants obtenus dans la théorie de l'interaction nucléaire, les auteurs estiment que, tant qu'il ne s'agit que d'ordres de grandeur, on peut remplacer la condition de Heisenberg par la condition moins restrictive suivante $\left|(\vec{p}_I - \vec{p}_{II})^2 - (p_I^0 - p_{II}^0)^2\right| \lesssim \left(\frac{\hbar}{r_0}\right)^2$. Les particules envisagées satisfaisant à cette condition, on peut espérer que les formules données fournissent des ordres de grandeur corrects. — La section efficace obtenue est trop petite pour rendre exactement compte de la formation, par le processus précédent, de la composante pénétrante du rayonnement cosmique; les auteurs attribuent cet écart à l'imprécision des calculs et aussi à la possibilité d'une origine explosive d'une grande partie de cette composante. Ils estiment cependant que leur résultat est satisfaisant dans l'état actuel de la théorie.

A. Proca (Paris).

Veksler, V., K. Alekseeva and N. Reinov: Heavy electrons in the cosmic rays. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Physique Nr 5/6, 727—729 u. engl. Zusammenfassung 729—730 (1938) [Russisch].

Verff. beobachten stark absorbierbare Teilchen, die sie als Neutronen ansehen. Sie nehmen mit der Höhe wie die harte Komponente der Höhenstrahlung zu und sollen aus ihr durch Vermittlung einer nichtionisierenden Strahlung entstehen. *C. F. v. Weizsäcker.*

Astrophysik.

Lundmark, Knut: On the Abel-Schwarzschild functional equation and its astronomical applications. 9. Congr. des Math. scand. 323—344 (1939).

Referat über die in der astronomischen Photometrie auftauchende Funktionalgleichung $\varphi(m+k) = \chi[\varphi(m)]$, in welcher m veränderlich, k konstant und bekannt, die Funktion $\chi[\varphi]$ gegeben und $\varphi(m)$ gesucht ist. Ausführliche Hinweise auf verschiedene Anwendungen. *Heckmann* (Göttingen).

Auluck, F. C.: The theory of pressure ionization and the constitution of the white dwarf stars. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **99**, 239—247 (1939).

Kothari (vgl. dies. Zbl. **15**, 231) hat die Theorie der Ionisation degenerierter Materie untersucht und das Resultat in der Theorie des Aufbaus der weißen Zwerge und der Planeten verwendet. Kothari hat hierbei den Aufbau und insbesondere die Beziehung zwischen Masse und Radius untersucht, indem mit einem durch den Stern oder Planeten hindurch konstanten mittleren Ionisationsgrad gerechnet wurde. Verf. entwickelt eine in bezug auf diesen Punkt genauere Theorie, indem die Abhängigkeit des Ionisationsgrades von der Dichte berücksichtigt wird. Die in dieser Weise ermittelte Masse-Radius-Beziehung stimmt mit der von Kothari erhaltenen gut überein. Auf die große Bedeutung der Frage der chemischen Zusammensetzung der Planeten bei dem Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung wird hingewiesen. *Bengt Strömgren* (Kopenhagen).

Mustel', E. P.: Über den jetzigen Stand des Problems der Sterntemperaturen und über die Verteilung der Energie in Sternspektren. Astron. J. Soviet Union **15**, 482—493 (1938) [Russisch].

In Anlehnung an die neueste Literatur gibt der Verf. eine Übersicht unserer jetzigen Kenntnisse auf dem Gebiete der Sterntemperaturen und bespricht auch die Arbeiten, welche die Verteilung der Energie in Sternspektren betreffen. *Slouka* (Prag).

Morgan, W. W.: Molecular bands as indicators of stellar temperatures and luminosities. Astrophys. J. **89**, 310—311 (1939).

Eine Anzahl von K- und M-Sternen wurde von Ambarzumian und Vashakidze [Russ. Astr. J. **15**, 14 (1938)] nach den starken TiO-Banden im sichtbaren Teil des Spektrums neu klassifiziert. Verf. nimmt an, daß diese Klassifikation eine gleichmäßige Abnahme der effektiven Temperatur und der Oberflächenhelligkeit vorstellt, und zieht folgende Folgerungen, welche die TiO-Zwergsterne von einer visuellen absoluten Helligkeit zwischen 9,0 und 16,5 betreffen: 1. Für jeden Wert der Oberflächenhelligkeit oder effektiven Temperatur gibt es nur einen einzigen Wert der Luminosität. 2. Da die Luminositäten und Oberflächenhelligkeiten

von Zwergen desselben Spektraltypus identisch sind, sind auch alle Zwerge des gleichen Spektraltypus von derselben Größe. Man kann also aus dem Spektraltypus allein, der durch die Intensität der starken TiO-Banden im visuellen Teil des Spektrums bestimmt ist, folgende Eigenschaften der M-Zwerge aus den Reduktionskurven wohlbekannter Sterne ableiten: die absolute Größe, die effektive Temperatur und den Sterndurchmesser. Diese Beziehungen sind deshalb von besonderem Wert, weil zwei Drittel aller unserer Nachbarsterne TiO-Zwerge mit den visuellen absoluten Helligkeit 9,0—14,0 sind. *Slouka* (Prag).

Bobrovnikoff, N. T.: Molecular bands in stellar spectra. Astrophys. J. 89, 301—310 (1939).

Verf. berichtet übersichtlich über den Stand der gegenwärtigen Kenntnisse betreffs der Molekularbanden in Sternspektren. Als außerordentlich wichtig hebt er die Tatsache hervor, daß die Unterschiede in der Beobachtungstechnik einen großen Einfluß auf die Resultate der Identifikation von Molekülen in Sternspektren haben. Eingehendes Studium von Sternspektren in den vergangenen Jahren hat bis jetzt keine mehr als zweiatomigen Moleküle in Sternspektren auffinden können, trotzdem die Möglichkeit, daß solche existieren, nicht vollständig als unwahrscheinlich zu betrachten ist. Zweiatomige Molekularbanden sind aber die wichtigste Charakteristik der meisten Sternspektren. Es handelt sich dabei um Resonanzbanden von neutralen zweiatomigen Molekülen, welche besonders stark bei den M-, S-, N- und R-Sternen hervortreten. Es wurden bis jetzt 27 zweiatomige Moleküle in Sternspektren identifiziert, von welchen die meisten im Sonnenspektrum vorkommen. Verf. erklärt an Hand der Russellschen Theorie, warum gewisse Moleküle starke, andere schwache Banden in Sternspektren erzeugen. Die Resultate betrachtet der Verf. nur als erste Näherung und betont die Notwendigkeit eines Ausbaues der Theorie sowie einer Vermehrung des Beobachtungsmaterials. *Slouka.*

Miyamoto, Shôtarô: On the hydrogen emission near the limit of the Balmer series in the solar chromosphere. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 22, 1—11 (1939).

Im Spektrum der Sonnenchromosphäre beobachtet man, daß die Intensität hoch angeregter Balmerlinien kontinuierlich in die Intensität des Balmerkontinuums übergeht. Bei Wiedervereinigungsleuchten müßte aber ein deutlicher Intensitätssprung an der Balmergrenze auftreten. Die Besetzungszahlen der hochangeregten Niveaus stimmen also nicht mit der Theorie des Wiedervereinigungsleuchtens überein, sondern ähneln vielmehr den Besetzungszahlen bei thermischem Gleichgewicht. Der Verf. deutet diesen Umstand dadurch, daß die hohen Energieniveaus nicht mehr ausschließlich der Kontrolle des Coulombfeldes des Kerns unterliegen, sondern stark durch die Existenz anderer Atome und Elektronen beeinflußt werden. Die Größe dieses Einflusses wird charakterisiert durch das Verhältnis der Ionisationshäufigkeit durch Stoß zur spontanen Übergangswahrscheinlichkeit in tiefer liegende Niveaus. Diese Vorstellung erlaubt eine Deutung der beobachteten Balmeremission in der Chromosphäre.

ten Bruggencate (Potsdam).

Lyot, Bernard: Observation of the sun's corona and prominences without eclipses. Nature, Lond. 143, 842—844 (1939).

Ein Bericht über B. Lyots erfolgreiche photographische und spektroskopische Erforschungen der Sonnenkorona und Protuberanzen außerhalb von Finsternissen. — Die direkten Koronaaufnahmen im langwelligen Spektralbereich zeitigten Ergebnisse, z. B. Veränderungen und Rotation der Korona, die man aus Finsternisbeobachtungen nicht hätte erhalten können. Ebenfalls ist die Methode von L. zur Untersuchung des Linienspektrums (von 3350—12000 Å) geeigneter als die Finsternismethode, da man durch lange Expositionen auch schwächere Linien erfassen und durch Anwendung großer Dispersion genauere Wellenlängen bestimmen kann. — Dann folgt ein kurzer Überblick über das Problem der Sonnenprotuberanzen, über ihre Beobachtungsmöglichkeiten, über ihre verschiedenen Erscheinungsformen und schnellen Bewegungen, die kinematographisch festgehalten werden konnten. *S. Baumbach* (Kiel).

Anderson, C. N.: A representation of the sunspot cycle. Bell Syst. techn. J. 18, 292—299 (1939).

Mémery, Henri: Sur une anomalie de la période solaire 1923—1933. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 733—734 (1939).

Verf. findet auf Grund der Greenwicher Sonnenfleckenrelativzahlen, daß sich im 18., 19. und 20. Jahrhundert die Periode von den Jahren 1923—1933 anomal verhält, da hier der Anstieg zum Maximum langsamer und der Abfall zum Minimum schneller als sonst erfolgt. Er glaubt hieraus auf die Existenz einer 100jährigen Periode in der Sonnentätigkeit schließen zu dürfen. *Kiepenheuer* (Göttingen).

Miczaika, G. R.: Intensitätsänderungen der Höhenstrahlung und Aktivität der Sonne. Z. Astrophys. 18, 146—150 (1939).

Im Anschluß an Kolhörster [Physik. Z. 40, 107 (1939)] wird für weiteres Erfahrungsmaterial eine (negative) Korrelation zwischen Flocken und Flecken auf der Sonne und der Höhenstrahlungsintensität gefunden. *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: A contribution to the tidal theory of the origin of the solar planets. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 17, 27—35 (1939).

According to the tidal theory of Chamberlain and Moulton the planets originated from a distortion of the Sun produced by an encounter with another star. In order to examine such a distortion mathematically, the authors schematize the problem to the consideration of the tidal action on the sun produced by a "star" at a fixed distance, whose mass varies with time. Under these conditions the potential at any point of the sun is evaluated, and the corresponding hydrodynamical equations for sufficiently small oscillations are written down. The external disturbing potential is expressed as a Fourier integral, and in the case considered in detail it is assumed to be proportioned to $\exp(-t^2/c^2)$, where t is the time and c is a constant parameter. The amplitude of the displacement of the surface of the Sun is expressed as an integral which is evaluated by the saddle-point method. This displacement is shown to consist of two parts, one being non-oscillatory and having a maximum at $t = 0$, the other being oscillatory and effective only for $t > 0$. The latter part is identified as that which is significant in the theory of Chamberlain and Moulton. The authors then show that a general term of the oscillatory part is a maximum (not infinite) when the parameter c bears a certain relation to the natural period of a mode of free oscillation of the Sun. This is interpreted to mean that in the type of encounter envisaged by Chamberlain and Moulton a maximum disturbance of the Sun occurs when the rapidity of the encounter is comparable with such a natural period. Further, the maximum is greatest when this period corresponds to the lowest mode.

W. H. McCrea (Belfast).

Orlov, S. V.: Evolution and origin of comets. Astron. J. Soviet Union 16, 3—26 u. engl. Zusammenfassung 26—27 (1939) [Russisch].

Es gibt unter den Kometenbahnen unseres Sonnensystems keine einzige verbürgte hyperbolische Bahn. Die Schlußfolgerung ist, daß die Gesamtheit der bis jetzt beobachteten Kometen im Sonnensystem ihren Ursprung hat. — Um den Staubschweif der einzelnen Kometentypen zu erklären, nimmt Verf. einen Zusammenstoß des Kometenkernes mit Meteoriten an, der den Auswurf von kosmischem Staub und kleinen Partikeln nach sich zieht. — Aus der Änderung der Helligkeit des Halleyschen Kometen schließt Verf. auf dessen Lebensalter und gelangt zu der Größenordnung einiger 100000 Jahre. Es folgt daraus, daß die Kometen wesentlich jünger sind als die Planeten.

S. Baumbach (Kiel).

Reynolds, J. H.: Extra-Galactic Nebulae. Astron. J. Soviet Union 15, 393—402 (1938) [Russisch].

Die vorliegende Arbeit ist eine übersichtliche Zusammenfassung der Forschungsergebnisse im Gebiet der außergalaktischen Nebel aus den Jahren 1935—1937. Hauptgewicht wird gelegt auf die klare Darstellung aller Versuche, die Frage zu lösen, ob die Rotverschiebung, die in Spiralnebelspektren zu beobachten ist, als ein Bewegungseffekt oder als eine unbekannte Änderung des Lichtes zu erklären ist. Es folgt eine Besprechung relativistischer Weltmodelle, wobei auch die Resultate der Forschungen über die scheinbare Verteilung außergalaktischer Nebel, die Dispersion in ihren absoluten Größen und ihre linearen Größen besprochen werden. Verf. berichtet auch über die letzten photoelektrischen Messungen der Helligkeiten und Farben außergalaktischer Nebel. *Slouka* (Prag).

Smart, W. M.: On the relation between the stream and ellipsoidal constants. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 99, 561—566 (1939).